流體力學

第二章 流體靜力學

- 流體靜力學 (fluid statics)：

當流體內無剪應力存在時，亦即流體處於靜止狀態或流體內彼此無相對運動之情況下，屬於流體靜力學之範疇。

- 流體動力學 (fluid dynamics)：

當流體內有剪應力存在時，亦即流體內彼此有相對運動之情況，屬於流體動力學之範疇。

- **2.1 流體靜力學基本定理**
  - 2.1.1 巴斯喀定理 (Pascal's principle)
  - 2.1.2 靜壓力與高度之關係
  - 2.1.3 巴斯喀矛盾性(Pascal's paradox)
- **2.2 絕對壓力與相對壓力(錶壓力)**
- **2.3 液體壓力計**
  - 測壓計
  - 差壓力計
  - 微壓力計
- **2.4 靜止流體作用於平面上之壓力**
  - 2.4.1 作用於水平平板之流體壓力
  - 2.4.2 作用於垂直平板之流體壓力
  - 2.4.3 作用於傾斜平板之流體壓力
- **2.5 浮力**
  - 2.5.1 阿基米德原理
  - 2.5.2 比重計
- **2.6 表面張力**

2.1 流體靜力學基本定理

- 2.1.1 巴斯喀定理 (Pascal’s principle)
- 2.1.2 靜壓力與高度之關係
- 2.1.3 巴斯喀矛盾性(Pascal’s paradox)

2.1.1 巴斯喀定理 (Pascal’s principle)

- 靜態流體中，作用於一點上的任意方向壓力皆相等。
- 其中包含三項要點:

1. 靜態流體中之某一點，其各方向之壓力強度均相同
2. 壓力強度與方向無關
3. 壓力強度為”純量”

- 假設在靜止流體中取一楔形體，由於沒有剪力，唯一的力是法線正交力與重力，所以在x與y方向的運動方程式分別為:

$$\sum F_x = P_x\Delta y - P_s\Delta s\sin(\theta) = ma_x = \rho\frac{\Delta x\Delta y}{2}a_x = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = P_y\Delta x - P_s\Delta s\cos(\theta) - \gamma\frac{\Delta x\Delta y}{2} = ma_y = \rho\frac{\Delta x\Delta y}{2}a_y = 0 \quad (2)$$

$$壓力 = \frac{力}{面積}$$

$$P[Pa] = \frac{F[N]}{A[m^2]}$$

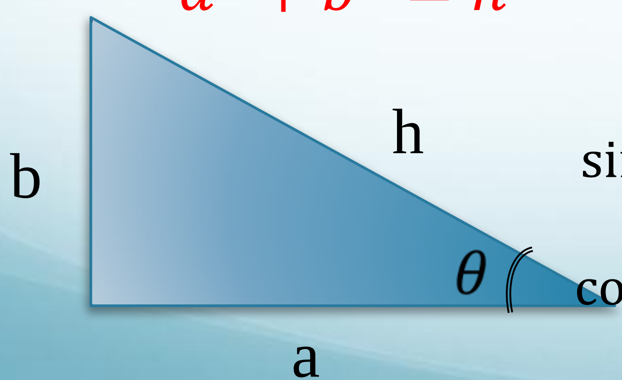
力=質量× 加速度

F[N]=m [kg]× a [m/s^2]

質量=體積×密度

m [kg]=V[m³] × ρ[kg/m³]

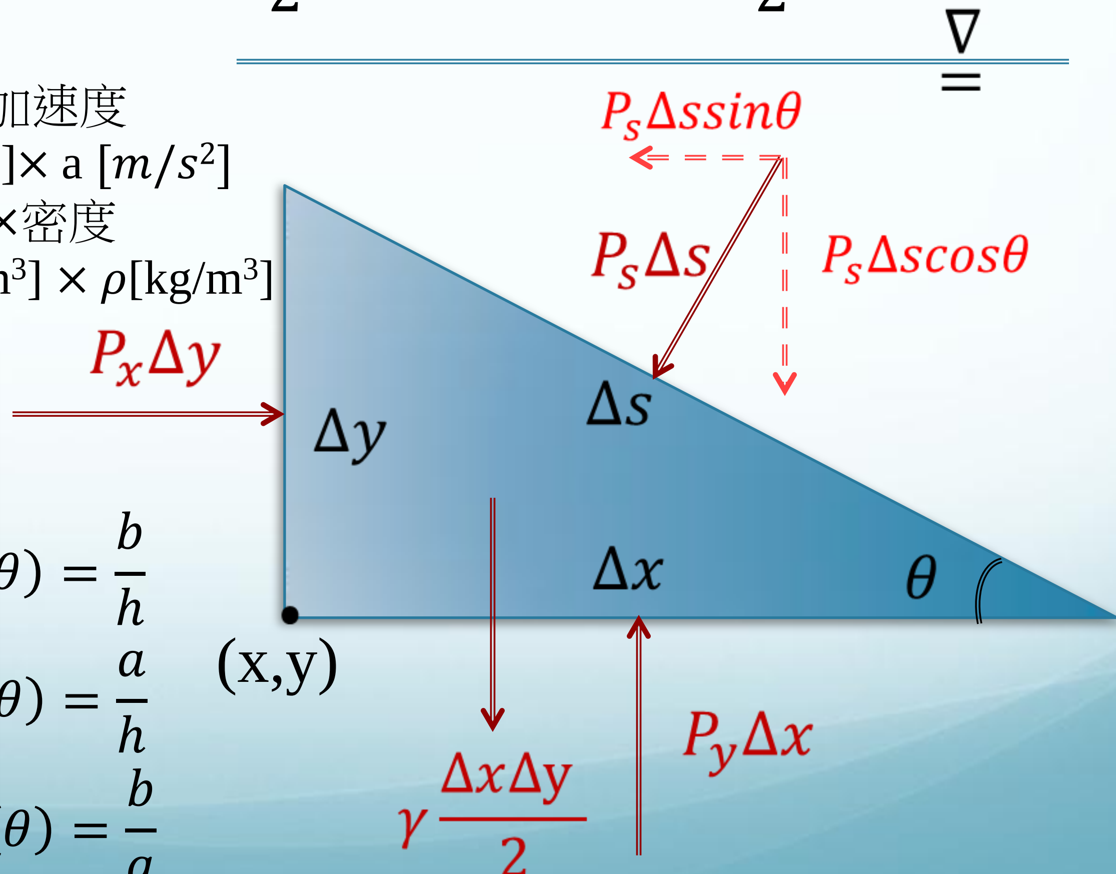
$$a^2 + b^2 = h^2$$



$$\sin(\theta) = \frac{b}{h}$$

$$\cos(\theta) = \frac{a}{h}$$

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}$$



因為$\Delta s \cdot sin(\theta) = \Delta y$， $\Delta s \cdot cos(\theta) = \Delta x$

故(1)式與(2)式可簡化為

$$P_x \cdot \Delta y - P_s \cdot \Delta y = 0 \qquad (3)$$

$$P_y \cdot \Delta x - P_s \cdot \Delta x - \gamma \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{2} = 0 \qquad (4)$$

由於Δx，Δy，Δs取無限小，體積趨於一點，故(4)式中$\gamma \frac{\Delta x \Delta y}{2}$項可忽略不計，因此可得

$$P_x = P_y = P_s \qquad (5)$$

因在假設中θ可為任何角度，所以上述推導過程證明了「**靜態流體中之某一點，其各方向之壓力強度均相同**」

2.1.2 靜壓力與高度之關係

(見課本p25)

密度為 ρ 之流體中，取一邊長分別為 dx, dy, dz 之自由體，如圖 2-2 所示，設在自由體形心 C 處之壓力為 p，則作用於此立方體各面上之壓力，若以泰勒級數 (Taylor's series) 展開，並忽略其中之高階項時，則與 x 軸垂直之面（ 面積為 $dydz$)，其前後壓力分別為

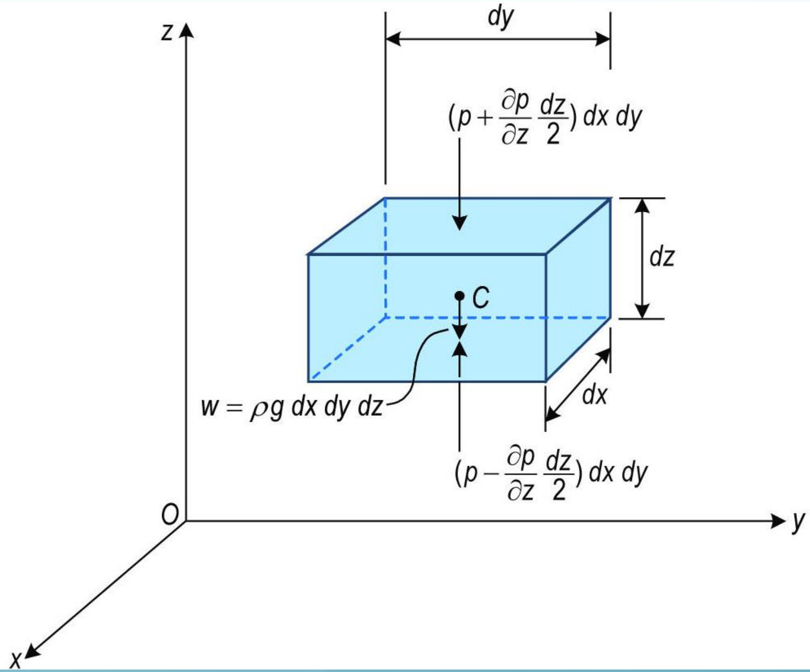
$$p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2} \quad 與 \quad p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

與 y 軸垂直之面（ 面積為 $dxdz$)，其左右壓力分別為

$$p-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2} \quad 與 \quad p+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}$$

與 z 軸垂直之面（ 面積為 $dxdy$)，其上下壓力分別為

$$p+\frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2} \quad 與 \quad p-\frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}$$



對於靜止之流體，各方向之合力應平衡如下：

$$\sum F_x = \left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2} \right) dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2} \right) dydz = 0$$

即 $$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \textbf{(a)}$$

$$\sum F_y = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2} \right) dxdz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2} \right) dxdz = 0$$

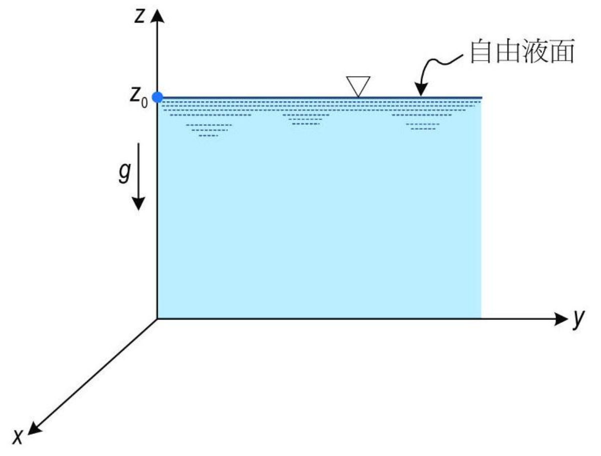
即 $$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \textbf{(b)}$$

$$\sum F_z = \left(p - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2} \right) dxdy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2} \right) dxdy - \rho g dxdydz = 0$$

即 $$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \qquad \textbf{(c)}$$

由 (a)、(b)、(c) 三式可得結論如下：在靜止流體中，同一水平面上任意點之壓力恆相等，且將僅隨高度之變化而變化。亦即靜止流體中，任一點的壓力 p 為高度 z 之函數，而與 x, y 無關，故壓力 p 可表為 $p(z)$，因此 (c) 式可改寫為

基本方程式: $$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \text{或} \quad \frac{dp}{dz} = -\gamma \qquad (6)$$



式中，
dP=在z方向(鉛直方向)之高度變化dz時之壓力變化
dz=在z方向上之高度變化 (z為鉛直座標，以向上為正，向下為負)
γ= 流體之單位重

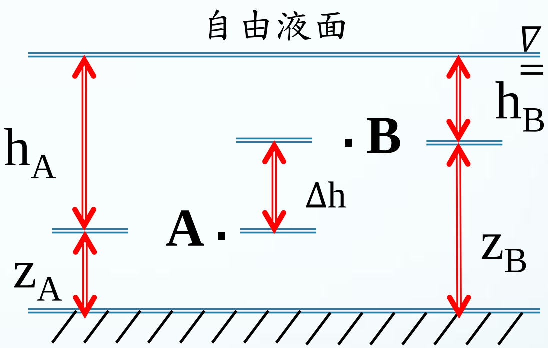
單位重(或稱比重量)=密度×重力加速度
$\gamma[N/m^3] = \rho[kg/m^3] \times g[\mathrm{m/s^2}]$
$[\mathrm{N}]=[\mathrm{kg \cdot m/s^2}]$

此公式對”可壓縮”與”不可壓縮”流體皆可成立，而其包含三項要點:
(1) 壓力之改變與流體單位重及高度有關
(2) 同一平面之靜止流體其壓力相等
(3) 流體越往下，壓力越大 (由公式中之負號所顯示)

對液體($\boxed{\text{不可壓縮流體}}$)而言，(6)式可寫成:

$$\Delta P = \gamma \cdot \Delta h \qquad (7)$$

式中，ΔP=兩點之壓力差 (壓力的改變量)
γ= 液體的單位重
Δh= 自液體表面起算，兩點之深度差



將(6)式$\frac{dP}{dz} = -\gamma$改寫成$\frac{\Delta P}{\Delta z} = -\gamma$

則ΔP=$-\gamma \cdot \Delta z$

$$P_A - P_B = -\gamma(z_A - z_B)$$
$$= -\gamma[-(h_A - h_B)]$$
$$= \gamma(h_A - h_B)$$

ΔP=$\gamma \cdot \Delta h$

即「靜止液體中不同高度之兩點，其壓力差為"液體單位重"與"自液面起算，兩點之深度差"之乘積」

若流體為$\boxed{\text{可壓縮流體}}$，其密度 ρ 將隨壓力和溫度變化，此時流體比重量 γ 不再為常數，式 (2-2) 可重寫為

$$dz = -\frac{dp}{\rho g} = -\frac{dp}{\gamma}$$

將上式積分，則

$$\int_{z_1}^{z_2} dz = -\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho g}$$

亦即

$$z_2 - z_1 = -\frac{1}{g}\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho} \qquad \textbf{(2-5)}$$

式 (2-5) 稱為可壓縮流體壓力與高度之關係式。又可壓縮流體因壓縮條件不同，其壓力與高度之關係式因而不同，現就理想氣體進行下列兩過程所引起之壓力變化推導：

(1) 當靜止流體在等溫壓縮情況下，因：

$$pv=\frac{p}{\rho}=RT=C\ (\text{常數})$$

故

$$\rho=\frac{p}{C}$$

代入式 (2-5) 得

$$z_2-z_1=-\frac{1}{g}\int_{p_1}^{p_2}\frac{Cdp}{p}=-\frac{C}{g}\ln\frac{p_2}{p_1}=\frac{C}{g}\ln\frac{p_1}{p_2}$$

亦即

$$z_2-z_1=\frac{p_1}{\rho_1 g}\ln\frac{p_1}{p_2}=\frac{p_2}{\rho_2 g}\ln\frac{p_1}{p_2}$$

或

$$\boxed{z_2-z_1=\frac{p_1}{\gamma_1}\ln\frac{p_1}{p_2}=\frac{p_2}{\gamma_2}\ln\frac{p_1}{p_2}}$$

例題

在海平面上空氣之比重量為 $12.01\ N/m^3$，大氣壓力為 $101.325\ kPa$，假設等溫壓縮狀況下，試求在高度為 3 km 處空氣之壓力與比重量？

在海平面上空氣之比重量為 $12.01\ \mathrm{N/m^3}$，大氣壓力為 $101.325\ \mathrm{kPa}$，假設等溫壓縮狀況下，試求在高度為 3 km 處空氣之壓力與比重量？

解： 在等溫壓縮情況下，壓力與高度之關係為

指數
e=2.71828

$$z_2 - z_1 = \frac{p_1}{\gamma_1} \ln \frac{p_1}{p_2}$$

故

$$p_2 = p_1 e^{\frac{-\gamma_1 (z_2 - z_1)}{p_1}} = (101.325 \times 10^3) \times e^{\frac{-12.01 \times (3000-0)}{101.325 \times 10^3}}$$
$$= (101.325 \times 10^3) \times 0.701 = 71.03\ \mathrm{kPa}$$

於等溫壓縮狀況下，

$$T_1 = T_2\ ,\ \frac{p_1}{\gamma_1} = \frac{p_2}{\gamma_2}$$

故

$$\gamma_2 = \gamma_1 \frac{p_2}{p_1} = 12.01 \times \frac{71.03 \times 10^3}{101.325 \times 10^3} = 8.419\ \mathrm{N/m^3}$$

2.1.3 巴斯喀矛盾性(Pascal’s paradox)

- 在討論巴斯喀定理時，液體微小體積的大小並不會影響其結果。壓力的變化僅與高度的變化及液體的種類有關，與液體容器的尺寸無關。
- 雖然液體的總量會依容器的不同而有很大的差異，但所有容器底部之壓力皆相等，此現象稱為巴斯喀矛盾性。

假設所有容器的液體都相同，
則所有容器底部之壓力皆相等。

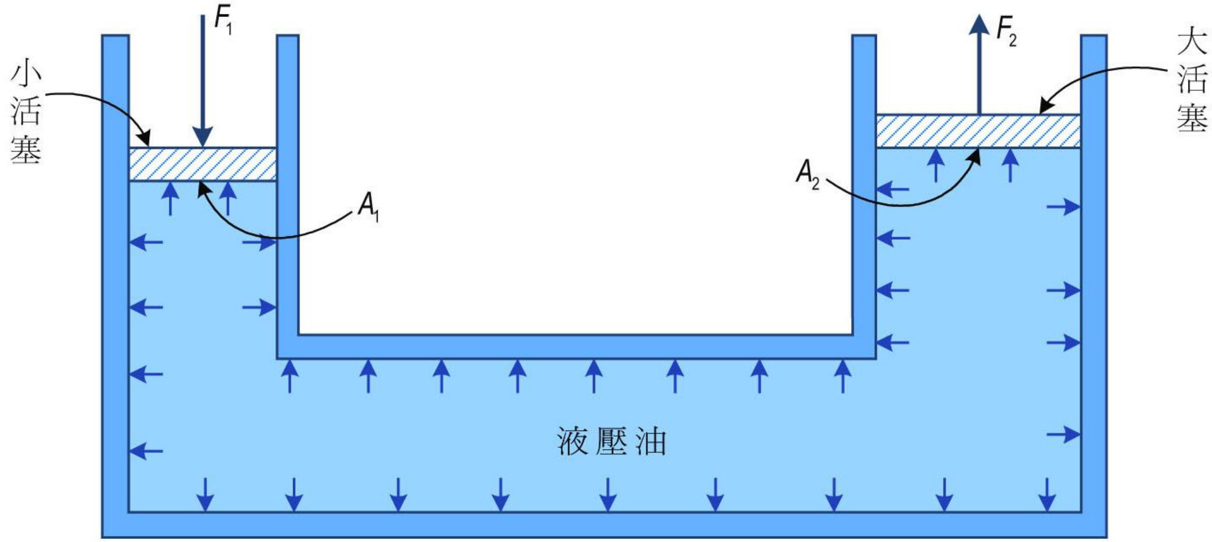


圖 2-14

如圖 2-14 所示之兩個充滿液壓油而相連之作用缸，當施一力 F_1 於左側作用缸之小活塞上時，其所生之壓力將大小不變地傳遞至右側作用缸之大活塞上，使大活塞上產生一較 F_1 為大之作用力 F_2，兩者之關係可以下式表示：

$$\boxed{\frac{F_1}{A_1} = p = \frac{F_2}{A_2}} \qquad (8)$$

若 $A_1 = \pi D_1^2/4, A_2 = \pi D_2^2/4$，則式 (8) 可改寫為

$$F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1} = F_1 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^2 \qquad (9)$$

式中 D_2 與 D_1 分別表示大小活塞之直徑。

通常之液壓油可視為不可壓縮之流體，因此其密度 ρ 為常數，小活塞移動之體積應等於大活塞移動之體積，若小活塞下降之距離為 L_1，大活塞上升之距離為 L_2，則 $\boxed{A_1L_1 = A_2L_2}$，故

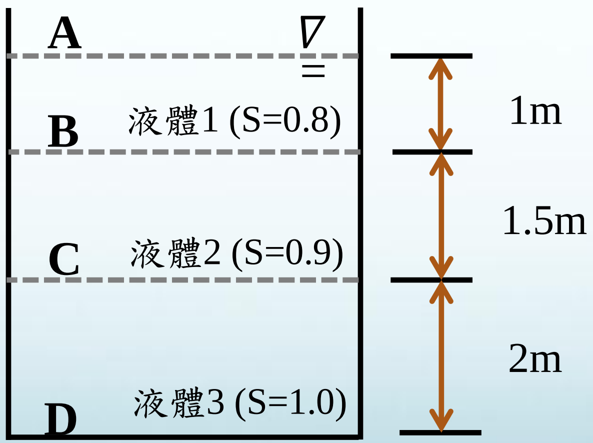
$$L_2 = L_1 \left(\frac{A_1}{A_2}\right) = L_1 \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \qquad (10)$$

例題 2.1

如下圖所示之容器，內含三種不同液體，其深度分別為2m、1.5m、1m，而比重相對應為1.0、0.9、0.8，試求:

(1) 側壓力之分佈

(2) 此容器單位寬度之總壓力(合力)



解

(1) 因液體最上方表面與大氣接觸，故其壓力視為零，即

$$P_A = 0$$

$$P_B = P_A + \gamma_1 h_1 = 0 + \left(0.8 \times 9.81 \frac{kN}{m^3}\right)(1.0m) = 7.848 \frac{kN}{m^3}$$

$$P_C = P_B + \gamma_2 h_2 = 7.848 + \left(0.9 \times 9.81 \frac{kN}{m^3}\right)(1.5m) = 21.09 \frac{kN}{m^3}$$

$$P_D = P_C + \gamma_3 h_3 = 21.09 + \left(1.0 \times 9.81 \frac{kN}{m^3}\right)(2.0m) = 40.71 \frac{kN}{m^3}$$

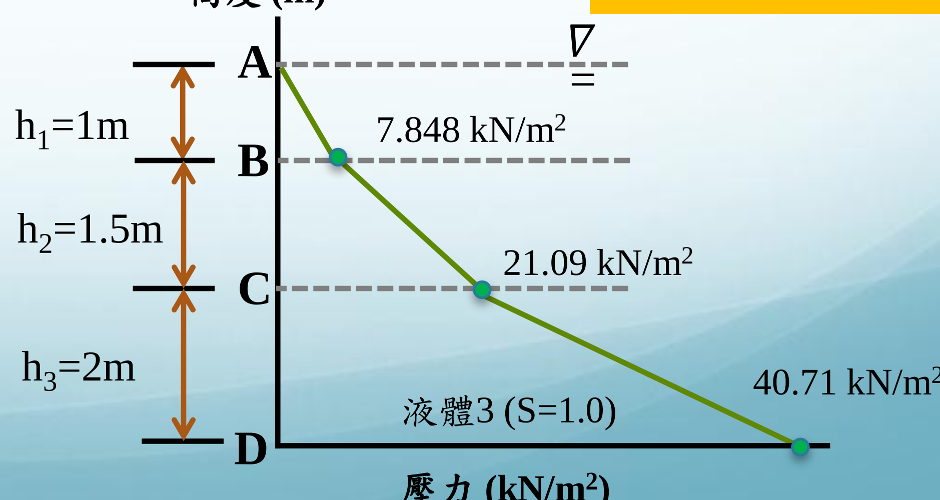
(2) 此容器單位寬度 (1m)之總測壓力為

$$\mathrm{F} = \frac{P_B h_1}{2} + \left(\frac{P_B + P_C}{2}\right) h_2 + \left(\frac{P_C + P_D}{2}\right) h_3$$

$$= \frac{7.848 \times 1.0}{2} + \left(\frac{7.848 + 21.09}{2}\right)(1.5)$$

$$+ \left(\frac{21.09 + 40.71}{2}\right)(2.0) = 87.42\ kN/m$$

側壓力分佈圖



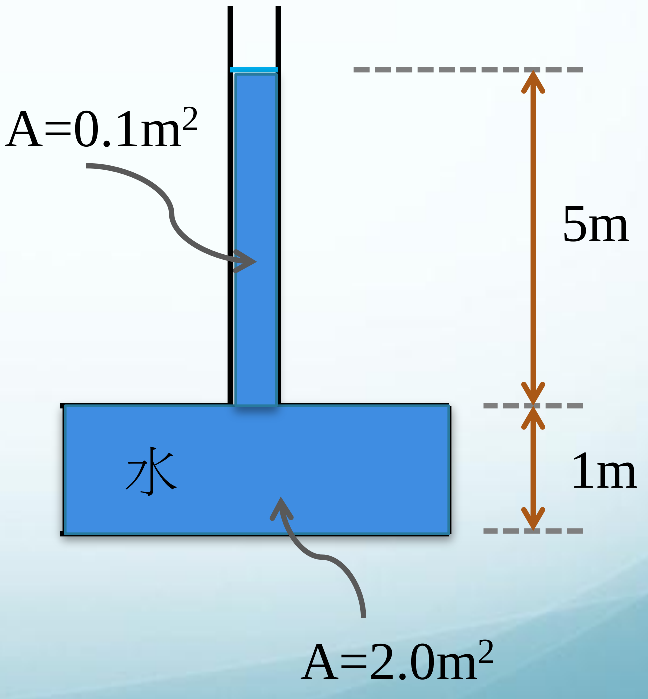
例題 2.2

如下圖所示，桶及管的橫斷面積各為2.0m² 及0.1m² ，試求:

(1) 由於水壓作用在桶底的總力

(2) 水之總重量

(3) 為何兩個答案有差別? 試說明之



解

(1) 桶底之總力

$F=PA=\gamma h=9.81\ kN/m^3\times 6\ m\times 2\ m^2 = 117.72\ kN$

(2) 水之總重量

$W=\gamma\forall= \gamma(\forall_1+\forall_2) = 9.81(0.1\times 5+2\times 1)=24.525\ kN$

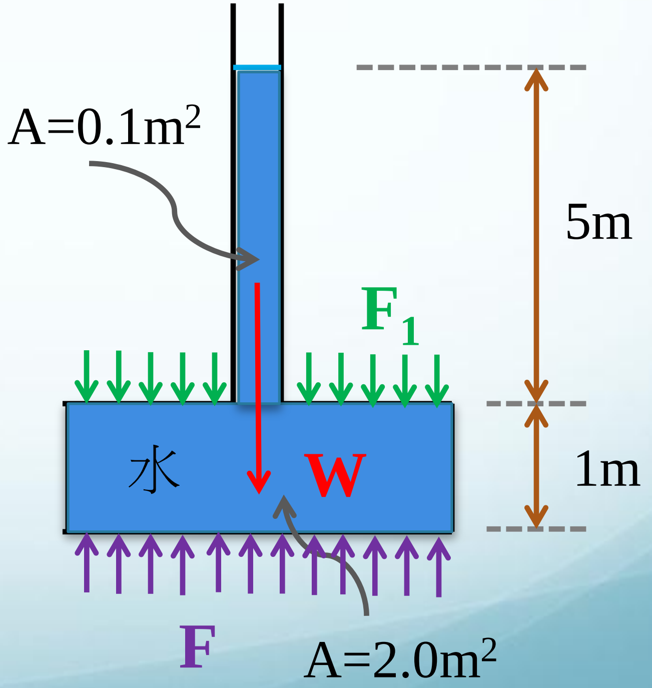
(3) 討論(1)與(2)之差異性:

桶底之總力較水之總重量大，

其差值為117.72 – 24.525 = 93.195 kN

其大小恰與桶上方平面所受之總力 F_1相等。

$F_1=(9.81\times 5)(2 - 0.1)=93.195\ kN$，其關係如右圖所示。



例題 2.3

已知：一掩蔽式汽油貯存桶發生洩漏現象，故將水充填入桶內以達某一深度，如圖E2.1所示。若汽油的比重 $SG = 0.68$。
求：在汽油 - 水的介面處壓力值，請分別使用 N/m^2、N/mm^2 方式表示。

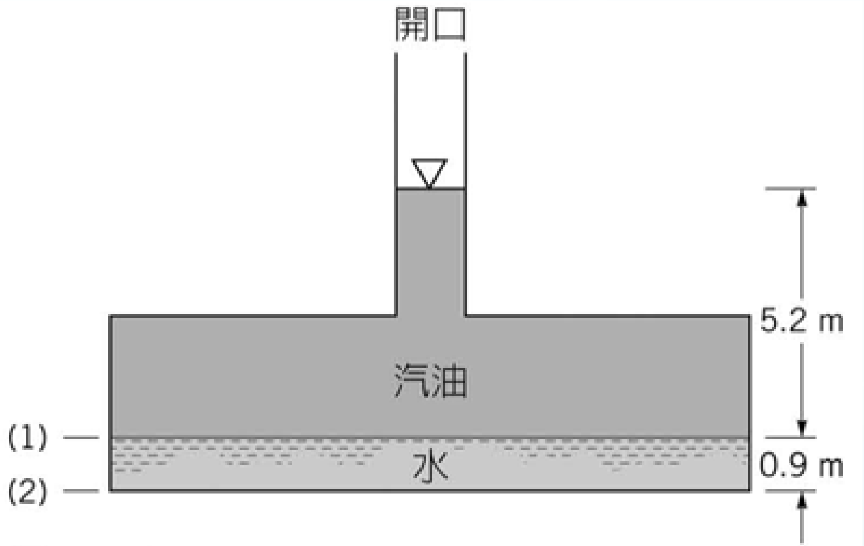


圖 E2.1

$$S \cdot G = \frac{\rho}{\rho_w} = \frac{\gamma}{\gamma_w}$$

其中 ρ_w, γ_w 分別為水之密度及比重量，比重為無因次物理量。

ρ_w 為純水在 4^0C時之密度，
ρ_w =1000 kg/m^3
γ_w 為純水在 4^0C時之單位重，
γ_w =9810 N/m^3

解：

壓力分布

$$p = \gamma h + p_0$$

而介面的壓力為

$$\begin{aligned} p_1 &= SG\gamma_{\mathrm{H_2O}} h + p_0 \\ &= (0.68)(9800\ \mathrm{N/m^3})(5.2\ \mathrm{m}) + p_0 \\ &= 34.7 + p_0 (\mathrm{kN/m^2}) \end{aligned}$$

若相對於大氣壓做測量基準 (即錶壓力)，則 $p_0 = 0$，因此

$$p_1 = 34.7\ \mathrm{kN/m^2} \qquad \text{(Ans)}$$

$$p_1 = \frac{34.7\ \mathrm{kN/m^2}}{10^6\ \mathrm{mm^2/m^2}} = 0.035\ \mathrm{N/mm^2} \qquad \text{(Ans)}$$

例題 2.4

如圖 2-17 所示之開口圓筒及圓錐容器，(a) 求作用在底部的力各為若干？(b) 兩者在其底部的壓力是否相同？

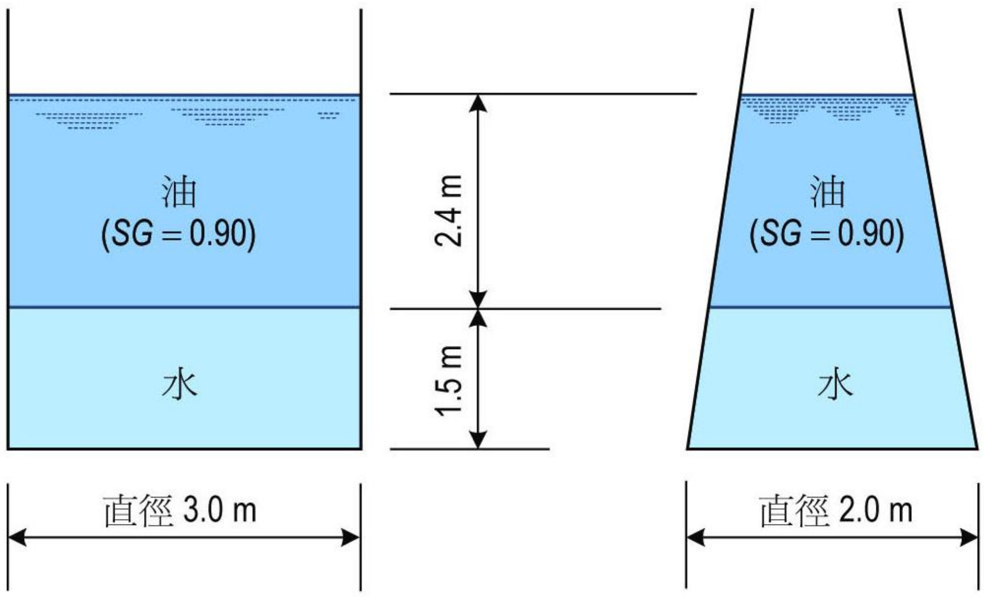


圖 2-17

解： 由壓力與高度之關係知，壓力僅與流體深度與比重有關，而與流體之總重無關。

因兩者底部深度相同，故底部壓力 p_B 應相同，即

$$\begin{aligned} p_B &= p_{atm} + \gamma_{\text{oil}}(2.4) + \gamma_w(1.5) \\ &= 0 + (0.90 \times 9.81)(2.4) + 9.81(1.5) \\ &= 35.9\ \text{kPa}\ (\text{錶壓力}) \end{aligned}$$

(a) 圓筒容器底部面積

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(3)^2}{4} = 7.07\ \text{m}^2$$

故底部所受的力

$$F = p_B A = 35.9 \times 7.07 = 253.8\ \text{kN}$$

圓錐容器底部面積

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi(2)^2}{4} = 3.14\ \text{m}^2$$

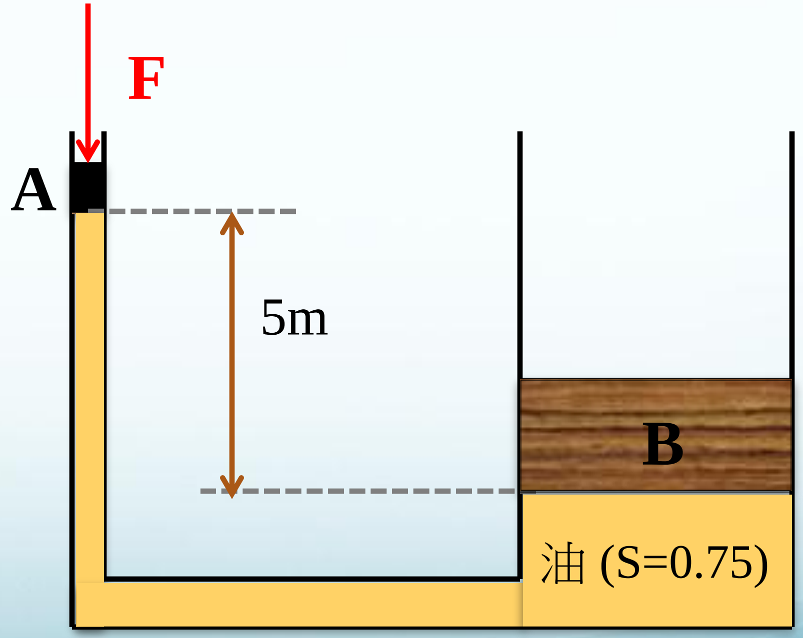
故底部所受的力

$$F = p_B A = 35.9 \times 3.14 = 112.7\ \text{kN}$$

(b) 雖然兩者底部所受的力因面積不同而不同，但底部之壓力相同，均為 35.9 kPa。

例題 2.5

如下圖所示，塞子A和圓筒B的面積分別為$0.004m^2$與$0.04m^2$，又B的重量為40kN。若容器和連接通道充滿比重為0.75之油，試求: 需多大的力作用於A才可以維持平衡 (不考慮塞子A之重量)



解

圓筒B底部之壓力

$$P_B = \frac{W_B}{A_B} = \frac{40}{0.04} = 1000\ kN/m^2$$

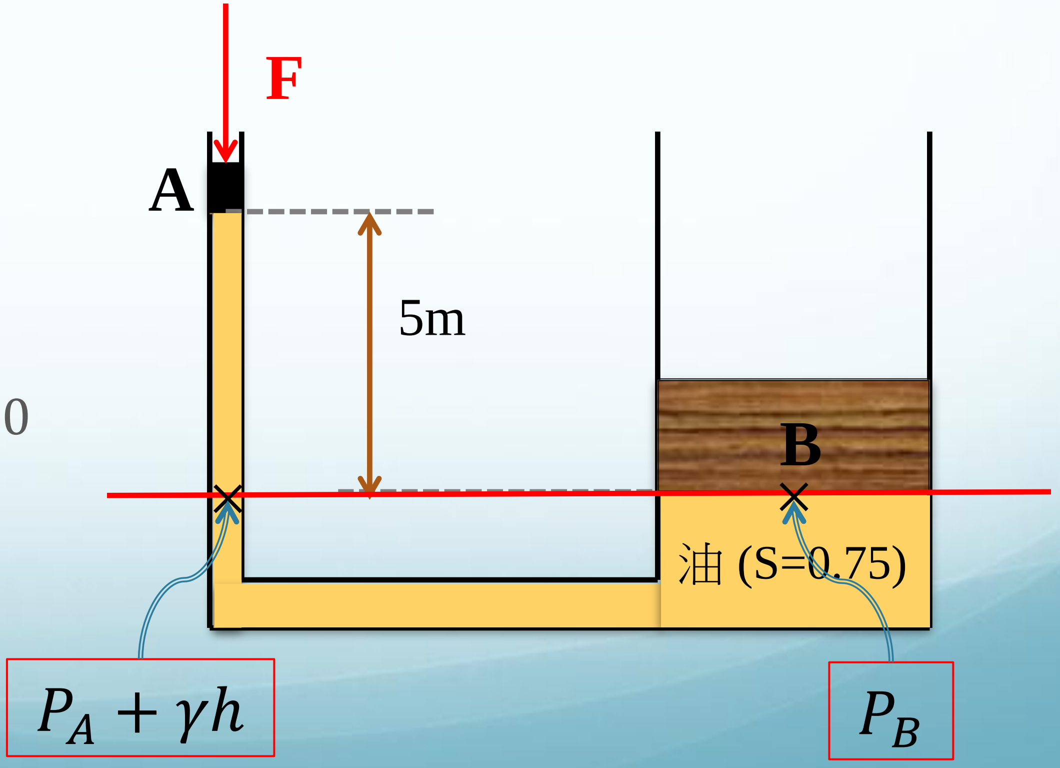
塞子A底部之壓力

$$P_A = \frac{F}{A_A} = \frac{F}{0.004} kN/m^2$$

$$P_A + \gamma h = P_B$$

$$\frac{F}{0.004} + (0.75 \times 9.81) \times 5 = 1000$$

F=3.85 kN



例題 2.6

如圖 2-15 所示之裝置中，施於槓桿 *AB* 之 *A* 端的作用力為 50 N，若欲使大活塞靜止不動，則在大活塞處需施加多大之作用力 *P*？

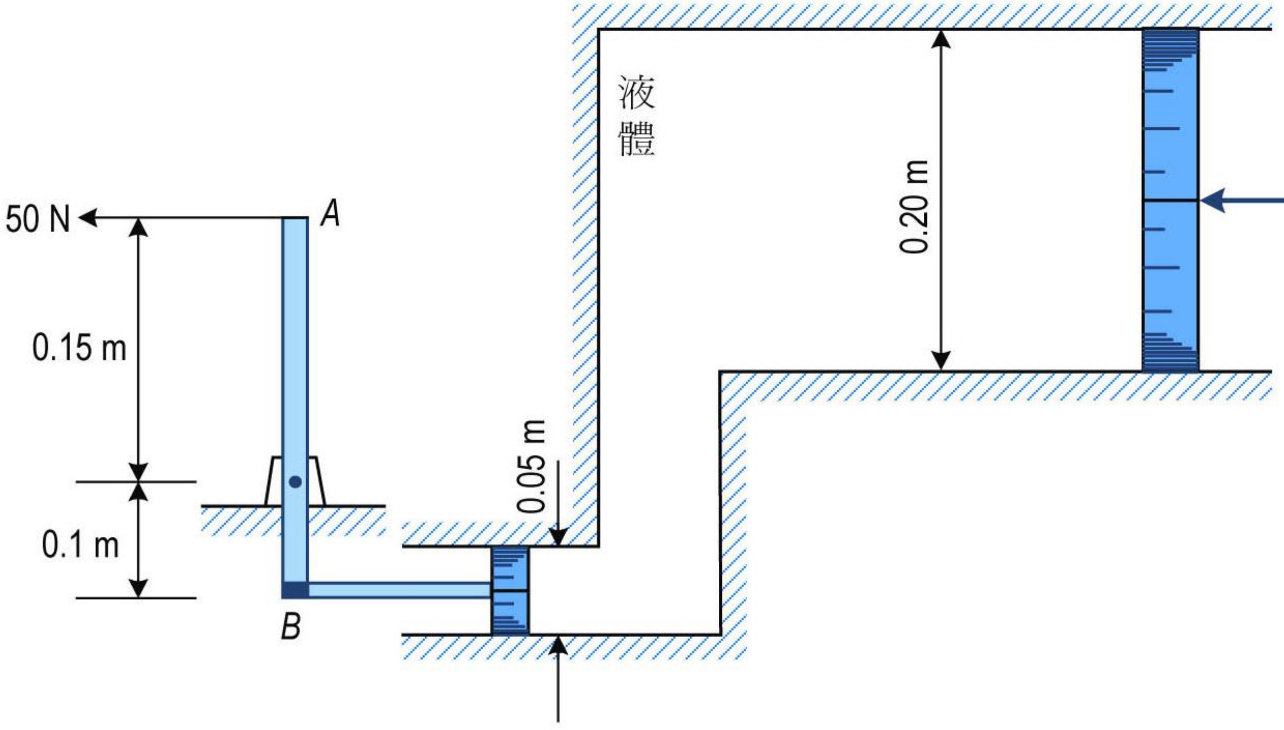


圖 2-15

解： 由槓桿原理可知，作用在 B 點處的力 F_B 為

$$F_A \times 0.15 = F_B \times 0.1$$

即

$$F_B = \frac{0.15}{0.1} \times 50 = 75\ \text{N}$$

而 F_B 在小活塞處所產生之壓力為

$$p = \frac{F_B}{A_B} = \frac{75}{\frac{\pi}{4}(0.05)^2} = 38{,}197.2\ \text{N/m}^2$$

故由巴斯噶原理知，欲使大活塞靜止不動，則大活塞處需施加之作用力 P 為

$$P = \frac{F_B}{A_B} \times A = 38{,}197.2 \times \left[\frac{\pi(0.2)^2}{4}\right] = 1200\ \text{N} = 1.2\ \text{kN}$$

例題 2.7

油槽如圖 2-7 所示，其一邊暴露在大氣中，另一邊充入空氣在油面上，若油的比重為 0.90，試求 (a) A, B, C, D, E 與 F 各點之錶壓力？(b) 油槽右側的空氣壓力。

（相對壓力）

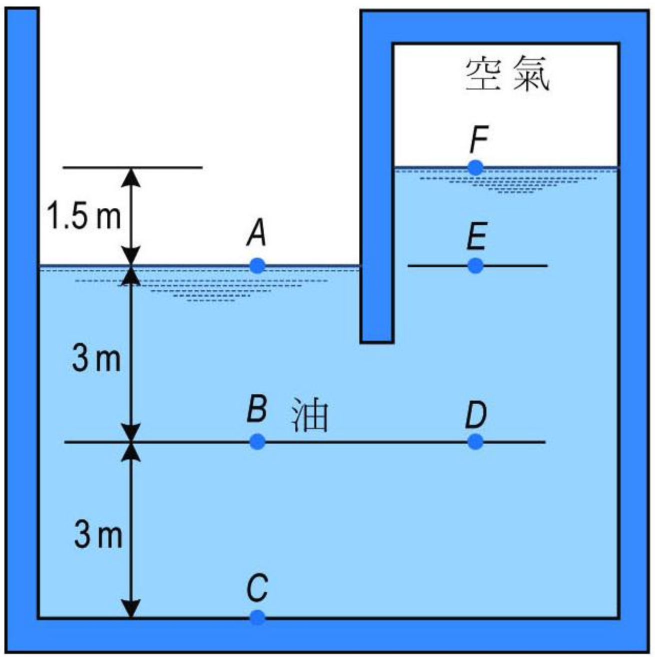


圖 2-7

解： (a) A 點因暴露於大氣中，故 $p_A = 0$（錶壓）

B 點處之壓力：

$$p_B = p_A + \gamma h = 0 + (0.90 \times 9.81) \times 3$$
$$= 26.487 \text{ kN/m}^2 = 26.487 \text{ kPa}$$

C 點處之壓力：

$$p_C = p_B + \gamma h = 26.487 + (0.90 \times 9.81) \times 3$$
$$= 52.974 \text{ kPa}$$

D 點處之壓力：因 D 與 B 在相同水平深度，故壓力相同，即

$$p_D = p_B = 26.487 \text{ kPa}$$

E 點處之壓力：因 E 與 A 在相同水平深度，故壓力相同，即

$$p_E = p_A = 0$$

F 點處之壓力：

$$p_F = p_A - \gamma h = 0 - (0.90 \times 9.81) \times 1.5$$
$$= -13.244 \text{ kPa}$$

(b) 油槽右側的空氣壓力：因空氣與油表面接觸，其壓力應與油表面處相同，即空氣壓力為 -13.244 kPa，即低於大氣壓力 13.244 kPa。

2.2 絕對壓力與相對壓力(錶壓力)

- 絕對壓力是取完全真空(絕對零壓)為基準而測量之壓力值。
- 錶壓力值則是以局部大氣壓為基準而測量之壓力值，因此當錶壓力值為零時，此壓力相當於局部大氣壓值。
- 絕對壓力通常為正值，但錶壓力可能為正值亦可能為負值，正負值的決定，完全端視壓力高於大氣壓(正值)或者低於大氣壓(負值)，一般負錶壓力亦稱為吸入壓力或真空壓力 (suction或vacuum pressure)。

$$p_{\mathrm{abs}} = p_{\mathrm{gage}} + p_{\mathrm{atm}}$$

$$p_{\mathrm{gage}} = p_{\mathrm{abs}} - p_{\mathrm{atm}}$$

P_{abs}: 絕對壓力
P_{gage}: 錶壓力
P_{atm}: 大氣壓力

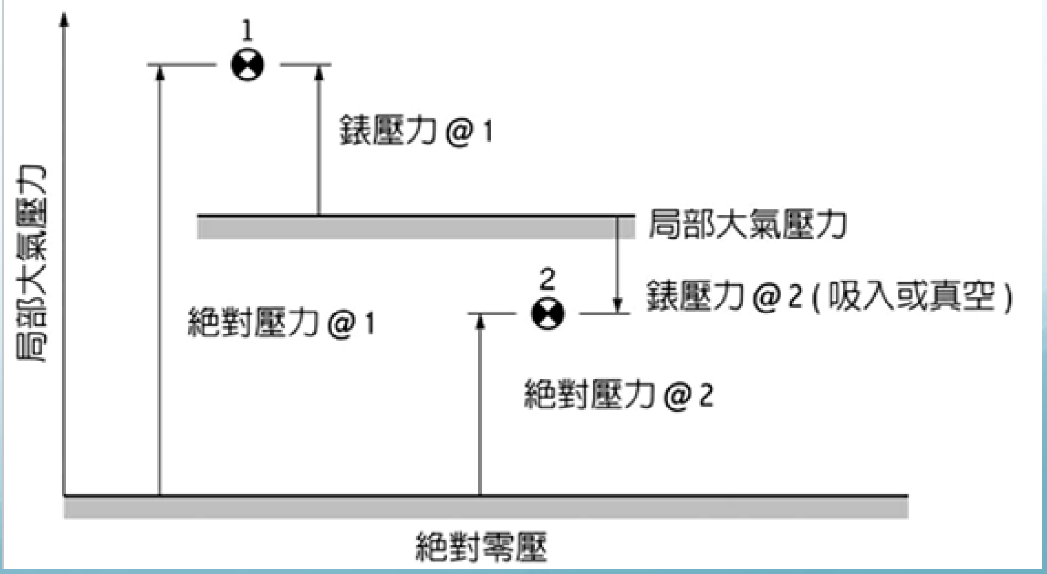


表 2-1　常用壓力單位換算表

atm	kPa	kg/cm^2	bar（巴）	psi	mH_2O	mmHg	ft H_2O
1	101.325	1.03329	1.01325	14.696	10.3329	760	33.914
0.9678	98.06	1	0.9806	14.2225	10	735.51	32.8213
0.9869	100	1.0198	1	14.5038	10.9978	750.06	33.4705
0.6804	6.8947	0.07031	0.6895	1	0.7031	51.715	2.3077
0.0968	9.806	0.1	0.0981	0.4422	1	73.551	3.2821
0.00132	0.1333	0.00136	0.001333	0.01933	0.0136	1	0.0446
0.0295	2.9877	0.03047	0.0299	0.4333	0.3047	22.409	1

1 巴 (bar) $=10^5$ Pa；1 毫巴 $=10^{-3}$ 巴。

例題 2.8

試問 120 kPa 的壓力相當於多少巴？多少 mm 水銀柱高？多少 m 水柱高？

表 2-1　常用壓力單位換算表

atm	kPa	kg/cm^2	bar（巴）	psi	mH_2O	mmHg	ft H_2O
1	101.325	1.03329	1.01325	14.696	10.3329	760	33.914
0.9678	98.06	1	0.9806	14.2225	10	735.51	32.8213
0.9869	100	1.0198	1	14.5038	10.9978	750.06	33.4705
0.6804	6.8947	0.07031	0.6895	1	0.7031	51.715	2.3077
0.0968	9.806	0.1	0.0981	0.4422	1	73.551	3.2821
0.00132	0.1333	0.00136	0.001333	0.01933	0.0136	1	0.0446
0.0295	2.9877	0.03047	0.0299	0.4333	0.3047	22.409	1

1 巴 (bar) $=10^5$ Pa；1 毫巴 $=10^{-3}$ 巴。

試問 120 kPa 的壓力相當於多少巴？多少 mm 水銀柱高？多少 m 水柱高？

解： $120\ \text{kPa} = 120 \times 10^3\ \text{Pa} = 1.2 \times 10^5\ \text{Pa} = 1.2$ 巴

$$\frac{1.2}{1.01325} \times 760 = 900.07\ \text{mm}\ \text{水銀柱高}$$

$$\frac{1.2}{1.01325} \times 10.3329 = 12.24\ \text{m}\ \text{水柱高}$$

例題 2.9

由壓力計測得某氣體之錶示壓力為 1.2 MPa，已知當地大氣壓力為 101.325 kPa，(a) 試求此氣體之絕對壓力為若干巴？(b) 相當於多少標準大氣壓力？

表 2-1　常用壓力單位換算表

atm	kPa	kg/cm^2	bar（巴）	psi	mH_2O	mmHg	ft H_2O
1	101.325	1.03329	1.01325	14.696	10.3329	760	33.914
0.9678	98.06	1	0.9806	14.2225	10	735.51	32.8213
0.9869	100	1.0198	1	14.5038	10.9978	750.06	33.4705
0.6804	6.8947	0.07031	0.6895	1	0.7031	51.715	2.3077
0.0968	9.806	0.1	0.0981	0.4422	1	73.551	3.2821
0.00132	0.1333	0.00136	0.001333	0.01933	0.0136	1	0.0446
0.0295	2.9877	0.03047	0.0299	0.4333	0.3047	22.409	1

1 巴 (bar) $=10^5$ Pa；1 毫巴 $=10^{-3}$ 巴。

表 1-3　SI 制常用字首與符號

字　首	符　號	因　數
giga	G	10^9
mega	M	10^6
kilo	k	10^3
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}

由壓力計測得某氣體之錶示壓力為 1.2 MPa，已知當地大氣壓力為 101.325 kPa，(a) 試求此氣體之絕對壓力為若干巴？(b) 相當於多少標準大氣壓力？

解： (a) 由式 (2-8) 知， $p_{\text{abs}} = p_{\text{atm}} + p_{\text{gage}}$

故此氣體之絕對壓力為

$$p_{\text{abs}} = 101.325 \times 10^3 + 1.2 \times 10^6$$
$$= 1{,}301{,}325 \text{ Pa}$$

亦即等於 $\dfrac{1{,}301{,}325}{10^5} = 13.01325$ 巴

(b) 因一標準大氣壓力等於 1.01325 巴

故此氣體之絕對壓力相當於 $\dfrac{13.01325}{1.01325} = 12.843$ 標準大氣壓力。

2.3 液體壓力計

1. 測壓計
2. 差壓力計
3. 微壓力計

1. 測壓計 (piezometer)

用以量測管內液體之壓力，如圖 2-8 所示。若液面上升或下降至平衡位置時，其高度為 h，則

(1) 在 (a) 情況下：$p_A = p_{atm} + \gamma h$ 只能用以量測正的錶壓力。

(2) 在 (b) 情況下：$p_A = p_{atm} - \gamma h$ 可用來量測正或負的錶壓力。

(3) 在 (c) 情況下：若管內液體（比重量為 γ_1）壓力較大時，為避免液柱上升高度太大，則測壓儀內可使用比重量較大之液體，即 $\gamma_2 > \gamma_1$，此時 $p_A = p_{atm} + \gamma_2 h_2 - \gamma_1 h_1$。

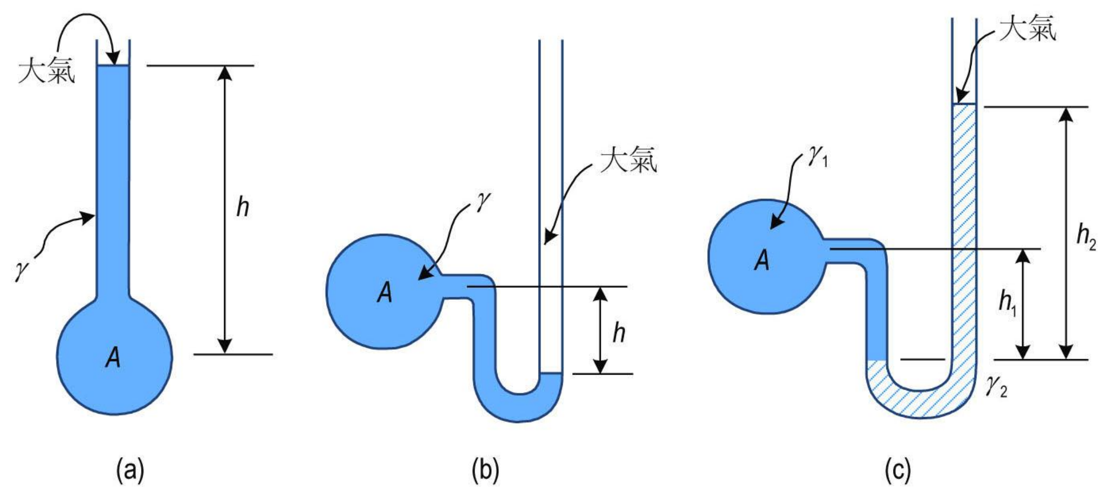


圖 2-8

例題 2.10

如圖 2-13 所示之壓力計，試求 *A* 管中之壓力為若干？

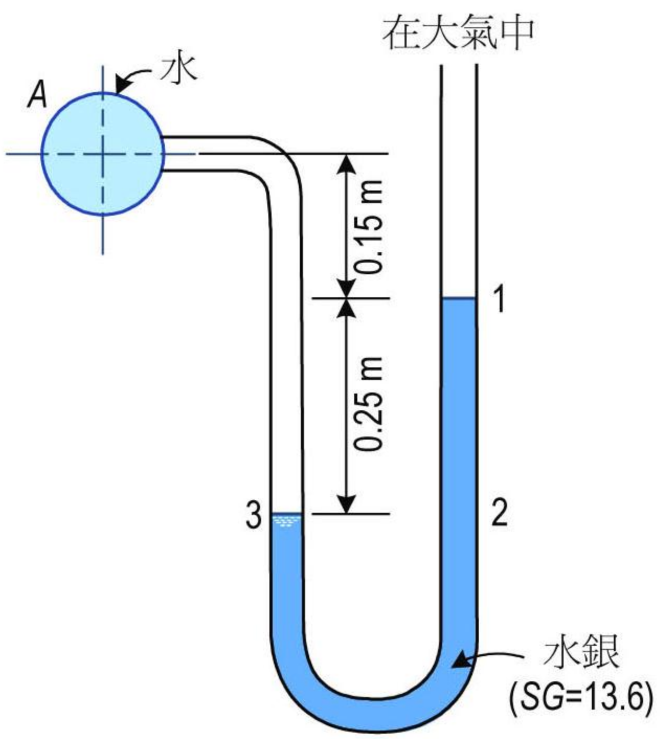


圖 2-13

解： 假設 $\gamma_w = 9.81\,\text{kN/m}^3$，則 $\gamma_{\text{Hg}} = 13.6 \times 9.81 = 133.4\,\text{kN/m}^3$ 而 $p_1 = p_{\text{atm}} = 0$（錶壓力）由壓力與高度之關係知 $p_2 = p_1 + 0.25\gamma_{\text{Hg}} = 0 + 0.25 \times 133.4 = 33.35\,\text{kN/m}^2$ 因 2, 3 兩點在同一液面高度，

故

$$p_3 = p_2 = 33.35\,\text{kN/m}^2$$

因而

$$p_A = p_3 - (0.25 + 0.15)\gamma_w = 33.35 - 0.4 \times 9.81$$

$$= 29.43\,\text{kN/m}^2 = 29.43\,\text{kPa（錶壓力）}$$

例題 2.11

已知：一密閉貯桶內含有壓縮空氣和油 ($SG_{oil} = 0.90$)，如圖E 2.4所示。將U型管液壓計使用水銀 ($SG_{Hg} = 13.6$) 為測壓液，並將U型管連接在貯桶。若柱高

$h_1 = 91.4\ \text{cm}$、$h_2 = 15.2\ \text{cm}$、

$h_3 = 22.9\ \text{cm}$。

求：試決定壓力計顯示的壓力讀數 (單位使用 N/cm^2)。

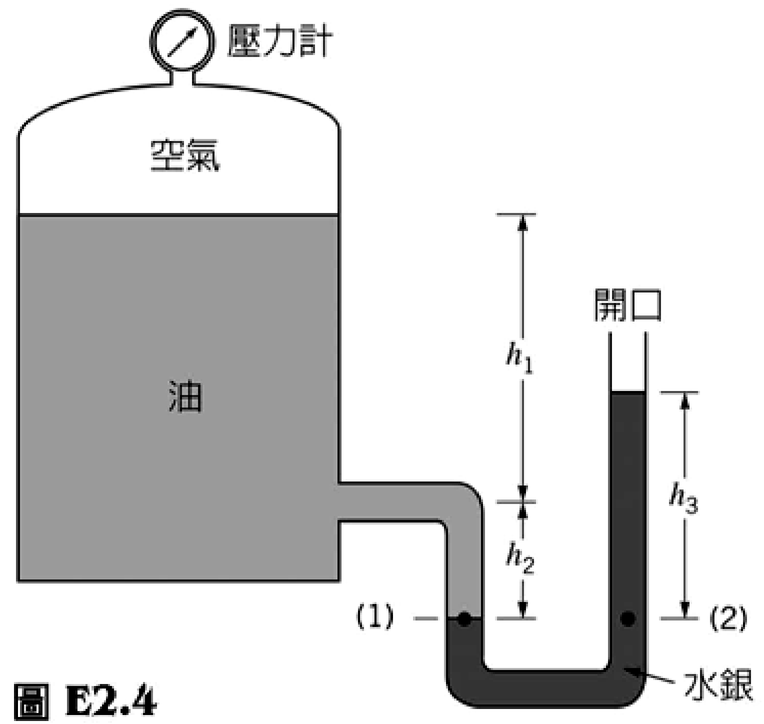


圖 E2.4

解：

在平面 (1) 的壓力為

$$p_1 = p_{\text{air}} + \gamma_{\text{oil}}(h_1 + h_2)$$

液壓計的方程式可表示成

$$p_{\text{air}} + \gamma_{\text{oil}}(h_1 + h_2) - \gamma_{\text{Hg}} h_3 = 0$$

$$p_{\text{air}} + (SG_{\text{oil}})(\gamma_{\text{H}_2\text{O}})(h_1 + h_2) - (SG_{\text{Hg}})(\gamma_{\text{H}_2\text{O}})h_3 = 0$$

可得

$$p_{\text{air}} = -(0.9)(9800\ \text{N/m}^3)\left(\frac{91.4+15.2}{100}\ \text{m}\right)$$

$$+(13.6)(9800\ \text{N/m}^3)\left(\frac{22.9}{100}\ \text{m}\right)$$

$$p_{\text{air}} = 21\ \text{kPa}$$

$$p_{\text{gage}} = \frac{21\ \text{kPa}}{10^4\ \text{cm/m}^2} = 2.1\ \text{N/cm}^2$$

(Ans)

2. 差壓計 (differential manometer)

用以量測兩點之壓力差 $p_A - p_B$，如圖 2-9 所示。

(1) 在 (a) 情況下：$p_A - p_B = \gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 - \gamma_3 h_3$。

(2) 在 (b) 情況下：$p_A - p_B = -\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + \gamma_3 h_3$。

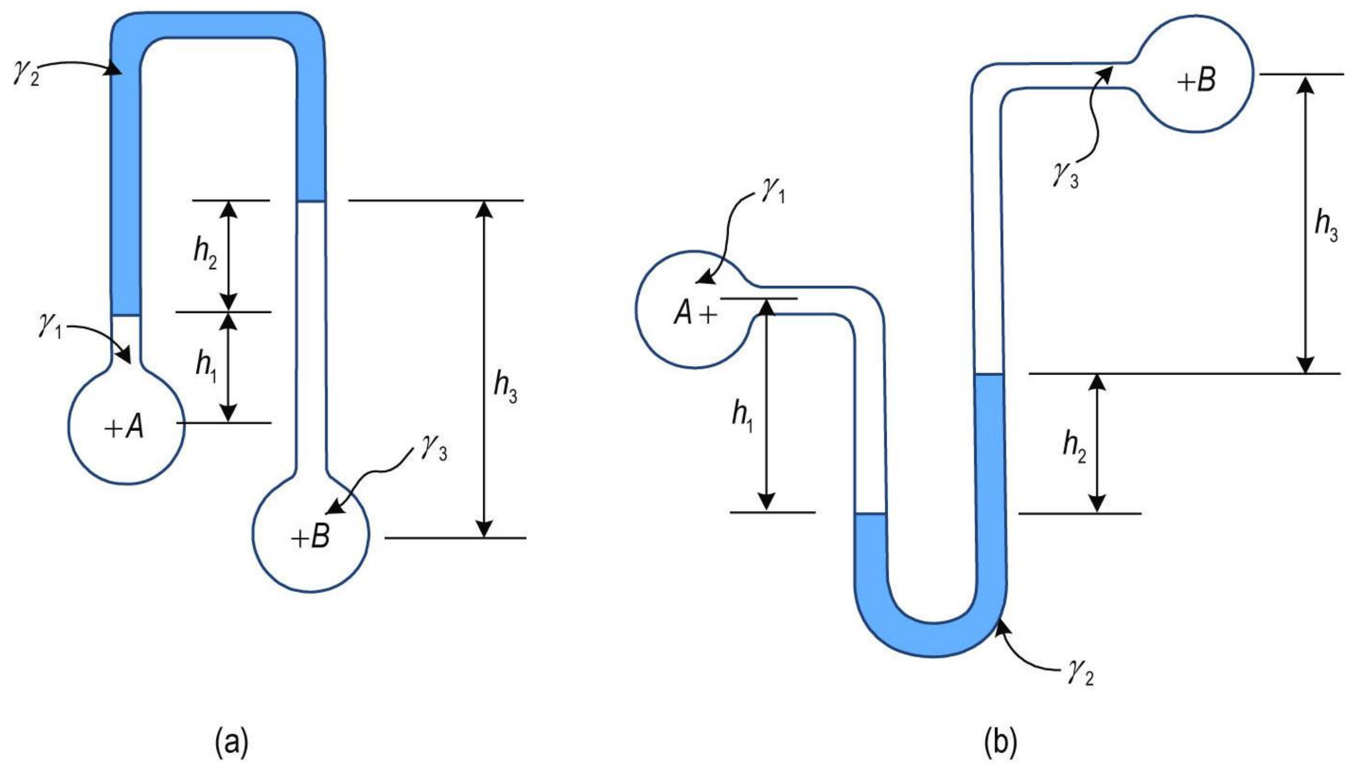


圖 2-9

例題 2.12

如圖 2-4 所示，試求 A, B 兩點壓力差 $p_A - p_B$ 為若干？假設水之比重量為 $9810\ \mathrm{N/m^3}$ 。

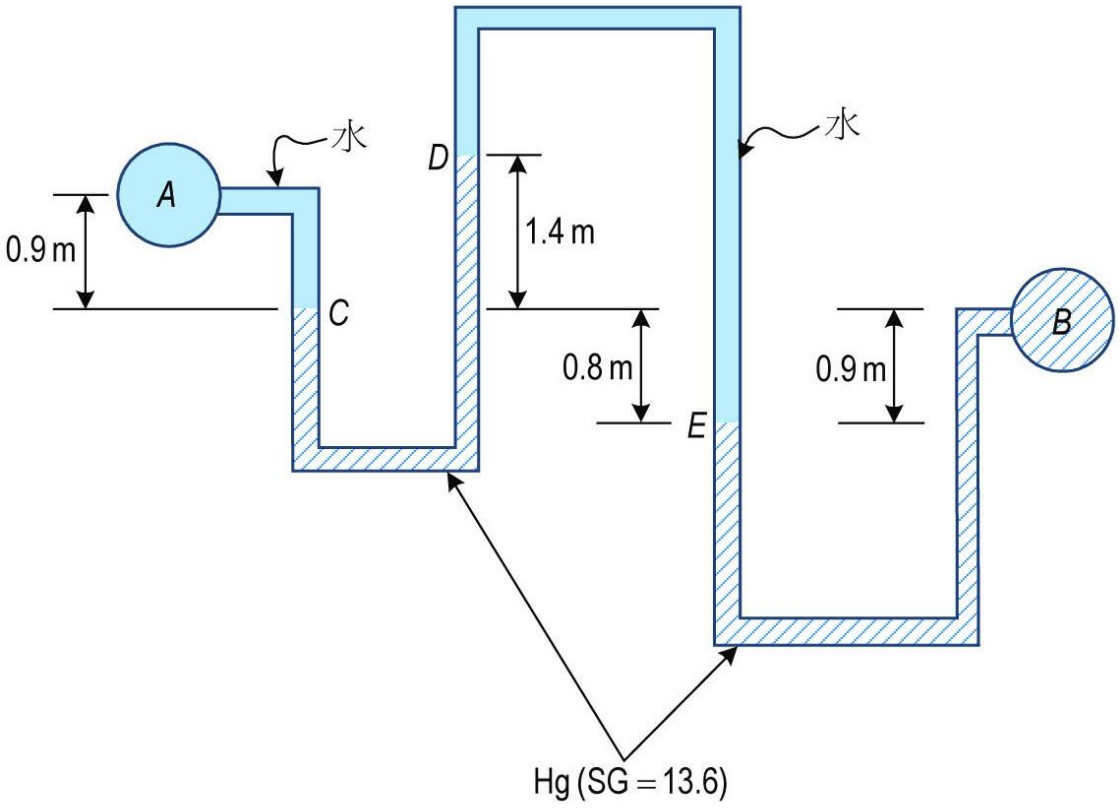


圖 2-4

解： $p_A + 9810 \times 0.9 - 13.6 \times 9810 \times 1.4 + 9810 \times (1.4 + 0.8)$

$$-13.6 \times 9810 \times 0.9 = P_B$$

故

$$p_A - p_B = -9810 \times 0.9 + 13.6 \times 9810 \times 1.4 - 9810 \times 2.2 + 13.6 \times 9810 \times 0.9$$

$$= 9810(-0.9 + 13.6 \times 1.4 - 2.2 + 13.6 \times 0.9)$$

$$= 276446\ \text{Pa} = 276.45\ \text{kPa}$$

3. 微壓力計 (micromanometers)

傾斜微壓力計 (inclined micromanometers)：其構造如圖 2-11 所示，由壓力與高度之關係知

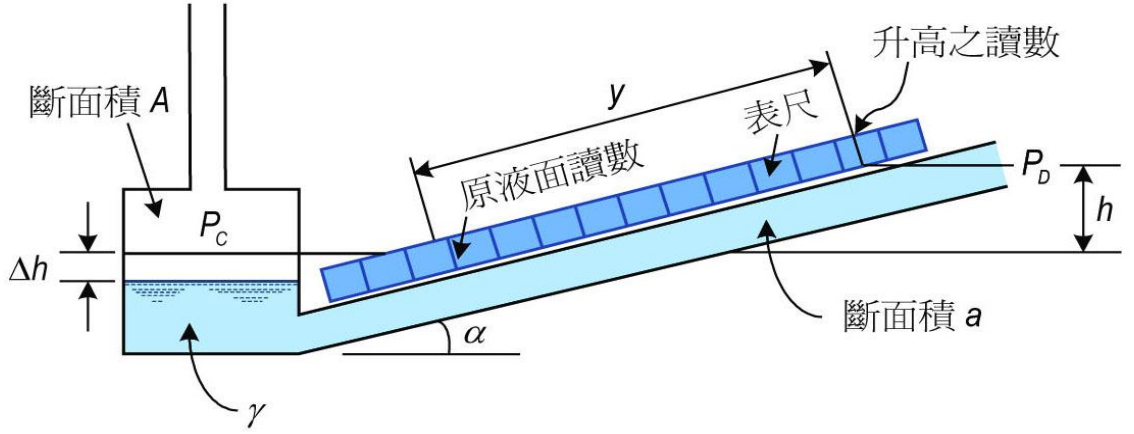


圖 2-11

$$p_C - \gamma(h + \Delta h) = p_D$$

而

$$A\Delta h = ay \quad 且 \quad h = y\sin\alpha$$

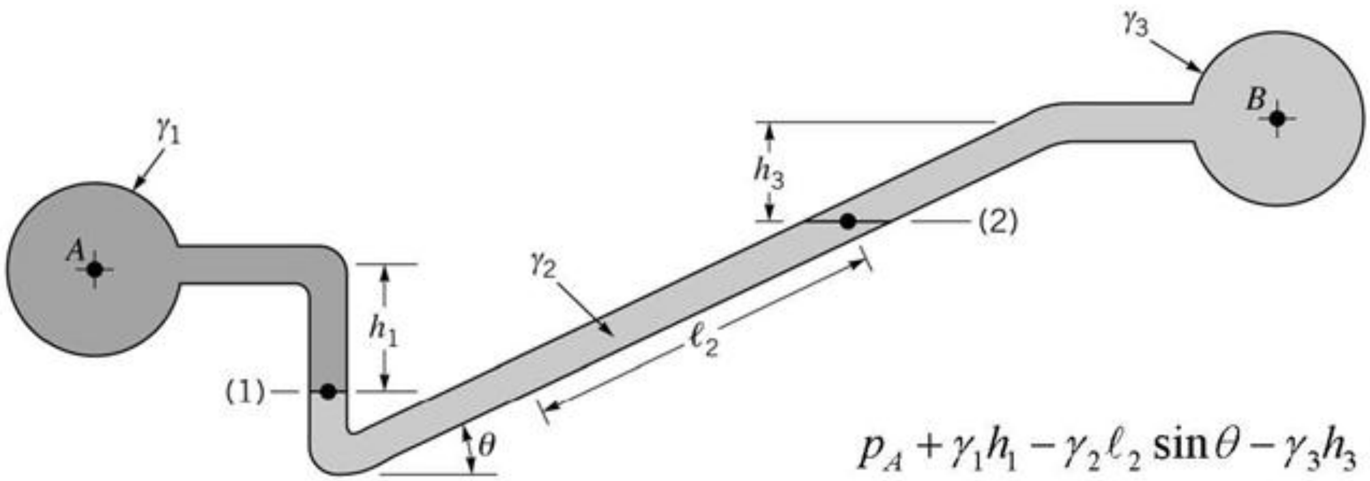
故

$$p_C - p_D = \gamma y\left(\sin\alpha + \frac{a}{A}\right) \tag{2-11}$$

若 $a/A \doteqdot 0$，則

$$p_C - p_D \doteqdot \gamma y \sin\alpha \tag{2-12}$$

傾斜管液壓計



$$p_A + \gamma_1 h_1 - \gamma_2 \ell_2 \sin\theta - \gamma_3 h_3 = p_B$$

$$p_A - p_B = \gamma_2 \ell_2 \sin\theta + \gamma_3 h_3 - \gamma_1 h_1$$

圖 2.12　傾斜管液壓計

例題 2.13

一水銀差壓計用以量測如圖 2-12 所示文氏管因斷面收縮所產生之壓力變化，而水銀之比重 SG = 13.6，(a) 試求斷面 A 和 B 間的壓力差？(b) 那一斷面處之壓力較大？

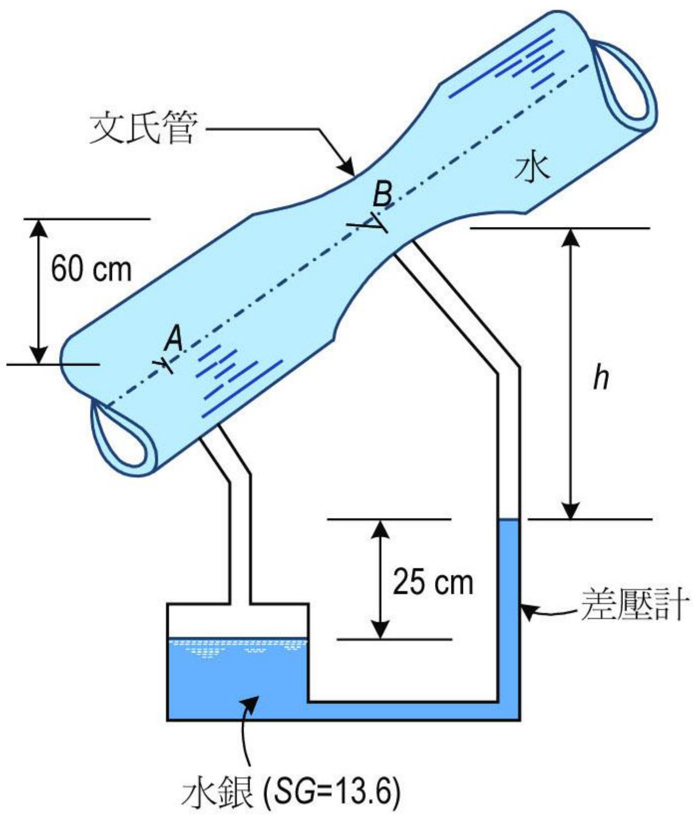


圖 2-12

一水銀差壓計用以量測如圖 2-12 所示文氏管因斷面收縮所產生之壓力變化，而水銀之比重 SG＝13.6，(a) 試求斷面 A 和 B 間的壓力差？(b) 那一斷面處之壓力較大？

解： (a) 假設 B 斷面處至右側水銀液面之高度差為 h，則由壓力與高度之關係知

$$p_A + (h - 0.6)\gamma_w + 0.25\gamma_w - 0.25\gamma_{Hg} - h\gamma_w = p_B$$

$$\begin{aligned} p_A - p_B &= 0.35\gamma_w + 0.25\gamma_{Hg} \\ &= 0.35 \times 9810 + 0.25 \times 13.6 \times 9810 \\ &= 36787.5\ \mathrm{N/m^2} = 3.68 \times 10^4\ \mathrm{Pa} \end{aligned}$$

(b) 因 $p_A - p_B > 0$，故知斷面 A 處之壓力較大。

2.3 靜止流體作用於平面上之壓力

- 2.3.1 作用於水平平板之流體壓力
- 2.3.2 作用於垂直平板之流體壓力
- 2.3.3 作用於傾斜平板之流體壓力

2.3.1 作用於水平板之流體壓力

(一) 水平平板

如圖 2-16(a) 所示，作用於水平平板的壓力為常數 γh，故其合力大小為

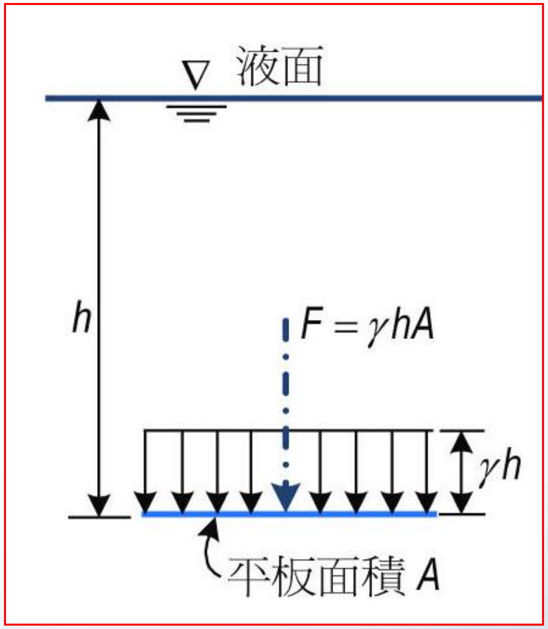
$$F = \int p dA = p \int dA = pA = \gamma h A \qquad \textbf{(2-16)}$$

而合力之作用點稱為壓力中心 (pressure center)，可由力矩原理得知

$$x_p = \frac{\int xpdA}{F} = \frac{p\int xdA}{pA} = \frac{\bar{x}A}{A} = \bar{x}$$

$$z_p = \frac{\int zpdA}{F} = \frac{p\int xdA}{pA} = \frac{\bar{z}A}{A} = \bar{z} \qquad \textbf{(2-17)}$$

式中，x_p, z_p 代表壓力中心座標，而 $\bar{x}, \bar{z}$ 代表面積之形心座標。故知作用於水平平板壓力之合力，其作用位置 (即壓力中心) 與面積之形心重合，作用線方向垂直向下。



2.3.2 作用於垂直平板之流體壓力

(二) 垂直平板

如圖 2-16(b) 所示，係以平板與液面之交線為座標之 z 軸，作用於垂直平板之壓力隨深度而變化，故其合力之大小為

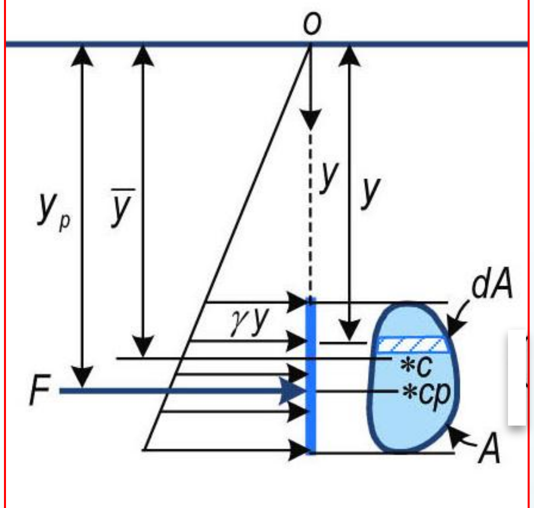
$$F = \int p dA = \gamma \int y dA = \gamma \bar{y} A \qquad \textbf{(2-18)}$$

而 $\gamma \bar{y}$ 為面積形心處之壓力。而壓力中心之座標可由力矩原理得知

$$y_p = \frac{\int y p dA}{F} = \frac{\gamma \int y^2 dA}{\gamma \bar{y} A} = \frac{I_z}{\bar{y} A} = \frac{1}{\bar{y} A}(\bar{I}_z + \bar{y}^2 A) = \frac{\bar{I}_z}{\bar{y} A} + \bar{y}$$

$$z_p = \frac{\int z p dA}{F} = \frac{\gamma \int y z dA}{\gamma \bar{y} A} = \frac{I_{yz}}{\bar{y} A} = \frac{1}{\bar{y} A}(\bar{I}_{yz} + \bar{z}\,\bar{y} A) = \frac{\bar{I}_{yz}}{\bar{y} A} + \bar{z} \qquad \textbf{(2-19)}$$

式中 $I_z, \bar{I}_z$ 分別為對 z 軸及與其平行之形心軸之慣性矩，而 $I_{yz}, \bar{I}_{yz}$ 分別為對座標軸 y, z 及與其平行之形心軸之慣性積矩。

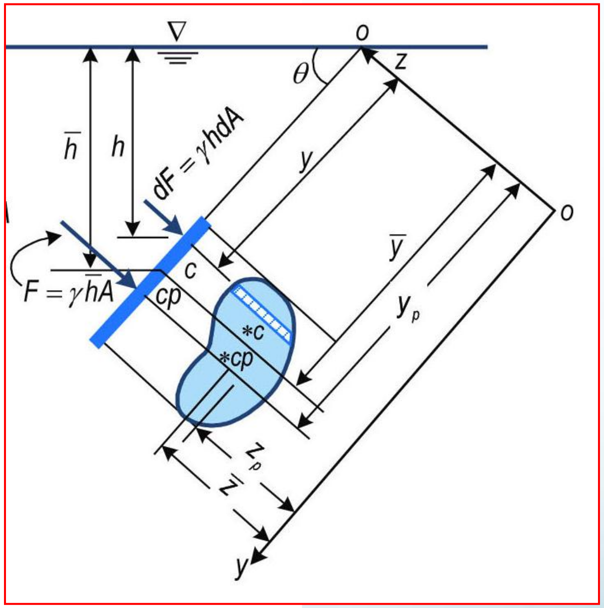


*c 表形心位置
*cp 表壓力中心位置

2.3.3 作用於傾斜平板之流體壓力

(三) 傾斜平板

如圖 2-16(c) 所示，係以平板傾斜方向為 y 軸，平板與液面之交線為 z 軸，則



$$dF = pdA = \gamma hdA$$

而 $$h = y\sin\theta$$

故其合力之大小

$$F = \int dF = \int \gamma y \sin\theta dA = \gamma\sin\theta\int ydA = \gamma\sin\theta\,\bar{y}A$$

而 $$\bar{y}\sin\theta = \bar{h}$$

故 $$F = \gamma\bar{h}A \quad \textbf{(2-20)}$$

式中 $\bar{h}$ 表面積形心之深度。

式中 $\bar{h}$ 表面積形心之深度。壓力中心座標亦可由力矩原理求得如下：

$$y_p=\frac{\int y\gamma y\sin\theta dA}{\gamma\bar{y}\sin\theta A}=\frac{\gamma\sin\theta\int y^2 dA}{\gamma\sin\theta\bar{y}A}=\frac{I_z}{\bar{y}A}=\frac{1}{\bar{y}A}(\bar{I}_z+\bar{y}^2A)$$

$$=\frac{\bar{I}_z}{\bar{y}A}+\bar{y}$$

$$z_p=\frac{\int z\gamma y\sin\theta dA}{\gamma\bar{y}\sin\theta A}=\frac{\gamma\sin\theta\int yzdA}{\gamma\bar{y}\sin\theta A}=\frac{I_{yz}}{\bar{y}A}=\frac{1}{\bar{y}A}(\bar{I}_{yz}+\bar{y}\cdot\bar{z}A)$$

$$=\frac{\bar{I}_{yz}}{\bar{y}A}+\bar{z} \tag{2-21}$$

由式 (2-16)、(2-18)、(2-20) 可知，靜止流體作用於平板上壓力之合力，其大小為面積乘以其形心深度之壓力，其作用線方向恆與平板相垂直。

除水平平板其壓力中心即是形心之情況外，一般情況下壓力中心必在形心之下方，可由式 (2-19)、(2-21) 中得知，兩者間之沿 y 軸方向之距離為

$$y_p-\bar{y}=\frac{\bar{I}_z}{\bar{y}A} \tag{2-22}$$

式中之 $\bar{I}_z$ 永遠為正，故知 $y_p>\bar{y}$。

例題 2.14

如圖 2-18 所示之垂直矩形牆，若液體為汽油 ($SG = 0.68$)，深度 3.80 m，牆長為 12 m，求 (a) 作用在此牆上壓力之合力與 (b) 其壓力中心之位置。

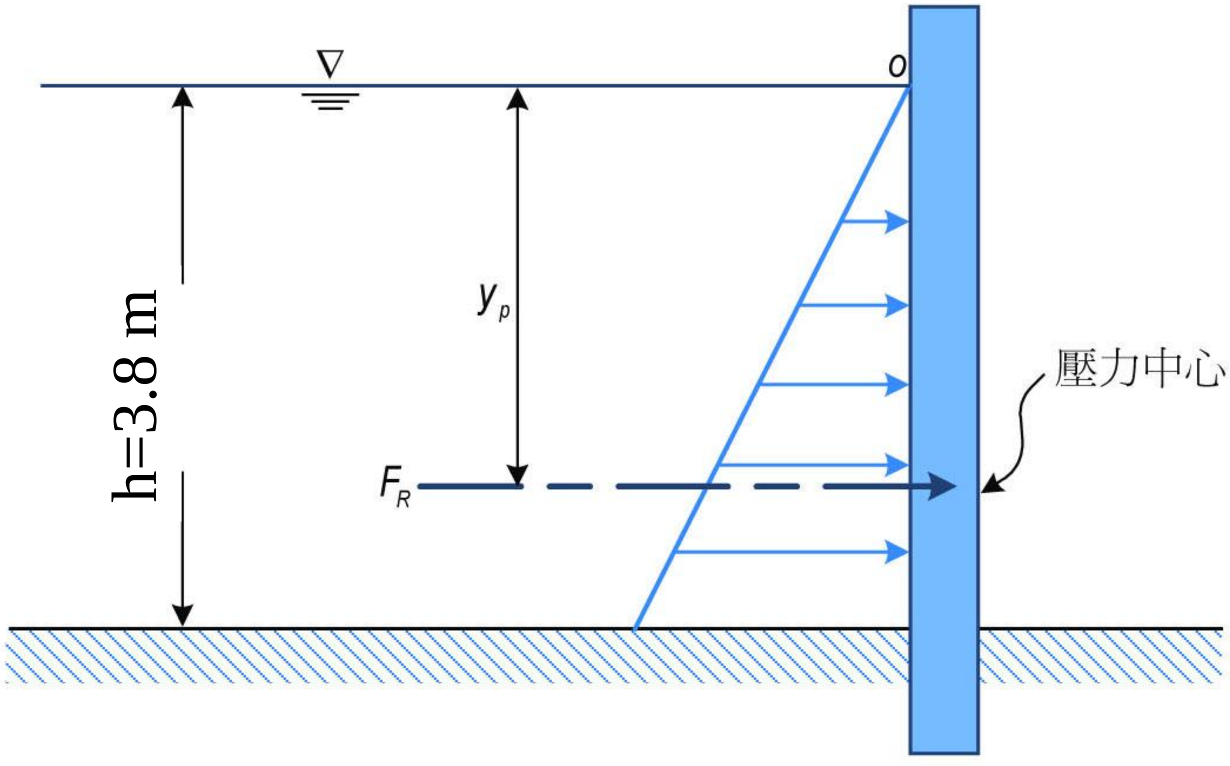


圖 2-18

解： (a) 因矩形面積之形心在其高度之中央，即

$$\bar{y} = \frac{h}{2} = 1.90 \text{ m}$$

故由式 (2-18) 知

$$F_R = \gamma \bar{y} A = (0.68 \times 9.81)(1.90)(3.80 \times 12)$$
$$= 577.96 \text{ kN}$$

(b) 若以牆長度之中心線與液面之交線為原點，則

$$y_p = \frac{\bar{I}_z}{\bar{y}A} + \bar{y} = \frac{\frac{1}{12} \times 12 \times (3.8)^3}{\frac{3.8}{2} \times (3.8 \times 12)} + \frac{3.8}{2} = 2.53 \text{ m}$$

亦即壓力中心在牆長度之中心線下，距液面 2.53 m 之位置。

例題 2.15

圖示 2-19 之圓形木塞直徑為 8 cm，流體密度為 1025 g/m^3 ，試求木塞上壓力作用力之合力和位置。

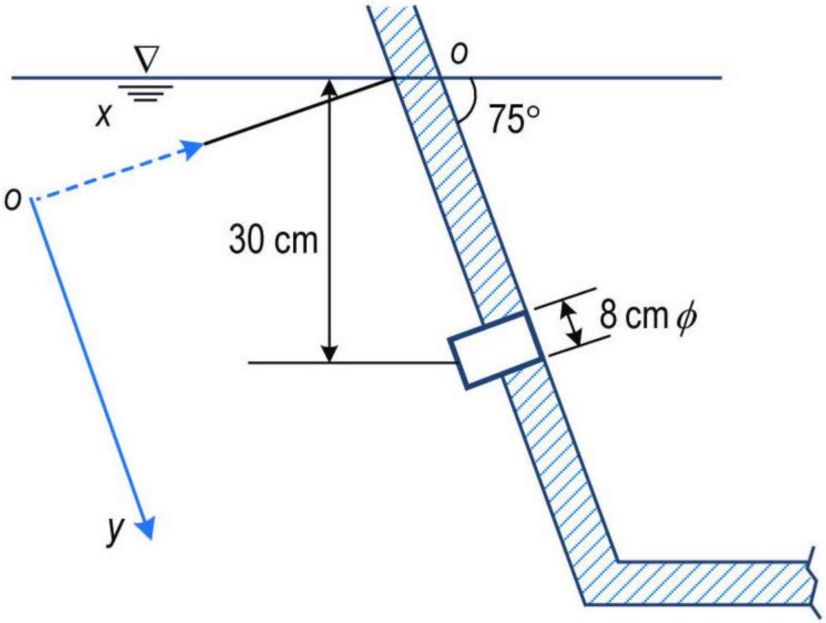


圖 2-19

解： 因 $\bar{h} = 30\text{ cm}$

$$F = \gamma \bar{h} A = (1025 \times 9.806) \times 0.3 \times \left[\frac{\pi}{4} \times (0.08)^2\right] = 15.156\text{ N}$$

$$y_p = \frac{\bar{I}_x}{\bar{y} A} + \bar{y}$$

而 $$\bar{y} = \frac{\bar{h}}{\sin 75°}$$

故 $$y_p = \frac{\frac{\pi}{64}(0.08)^4}{\left(\frac{0.3}{\sin 75°}\right) \times \left[\frac{\pi}{4} \times (0.08)^2\right]} + \frac{0.3}{\sin 75°}$$

$$= 0.312\text{ m}$$

即作用於木塞上之壓力作用力之合力為 15.156 N，其作用位置（壓力中心）距水平面上 O 點沿斜面（即 y 軸）下 0.312 m。

例題 2.16

圖示 2-20 三角形閘門 *CDE*，鉸鏈於 *CD*，施力 *P* 作用於 *E* 點，液體油之比重為 0.8，底邊外界為大氣，略去閘門重，求 (a) 作用於閘門力之大小；(b) 壓力中心的位置；(c) 打開閘門所需之力大小 *P*。

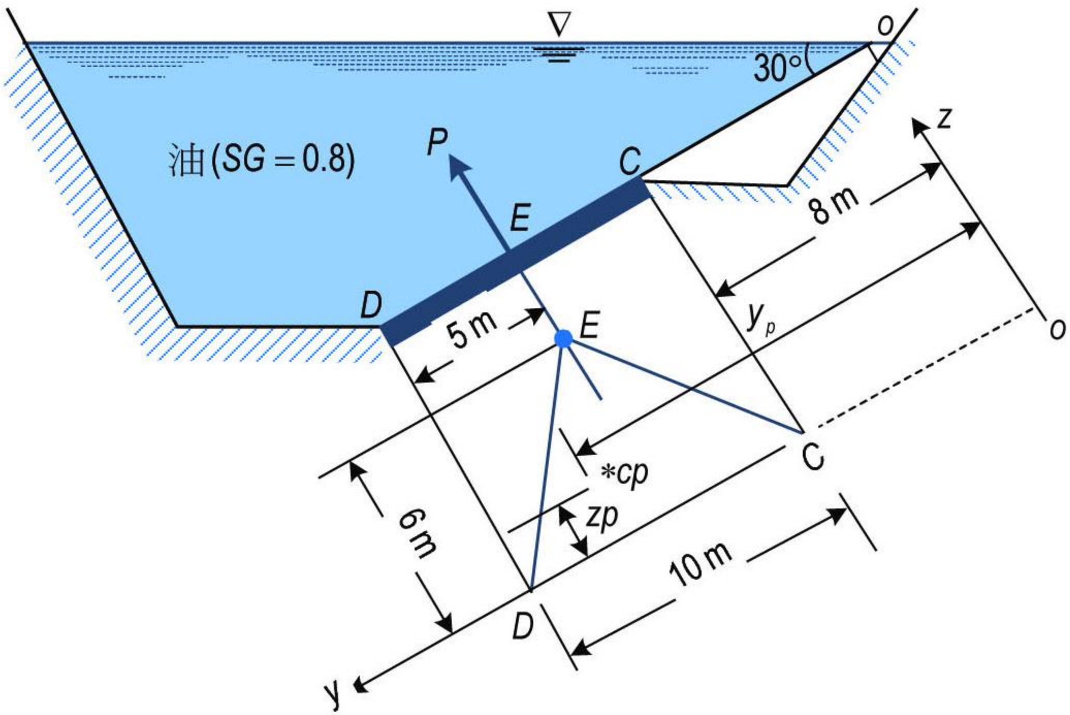


圖 2-20

解： (a) $F = \gamma \bar{h} A = \gamma \bar{y} \sin\theta A$

$$= 0.8 \times 9.806 \times 13 \times \sin 30° \times \left(\frac{1}{2} \times 10 \times 6 \right)$$

$$= 1529.74 \text{ kN}$$

(b) 因形心座標 $\bar{z} = 2.0 \text{ m}$, $\bar{y} = 13 \text{ m}$

$$z_p = \frac{\bar{I}_{yz}}{\bar{y}A} + \bar{z} = \frac{0}{\bar{y}A} + 2 = 2 \text{ m}$$

$$y_p = \frac{\bar{I}_z}{\bar{y}A} + \bar{y} = \frac{2 \times \frac{1}{12} \times 6 \times 5^3}{13 \times 30} + 13 = 13.32 \text{ m}$$

(c) $\sum M_{CD} = 0$, $P \times 6 - F \times 2 = 0$

$$\therefore \quad P = \frac{1529.74 \times 2}{6} = 509.91 \text{ kN}$$

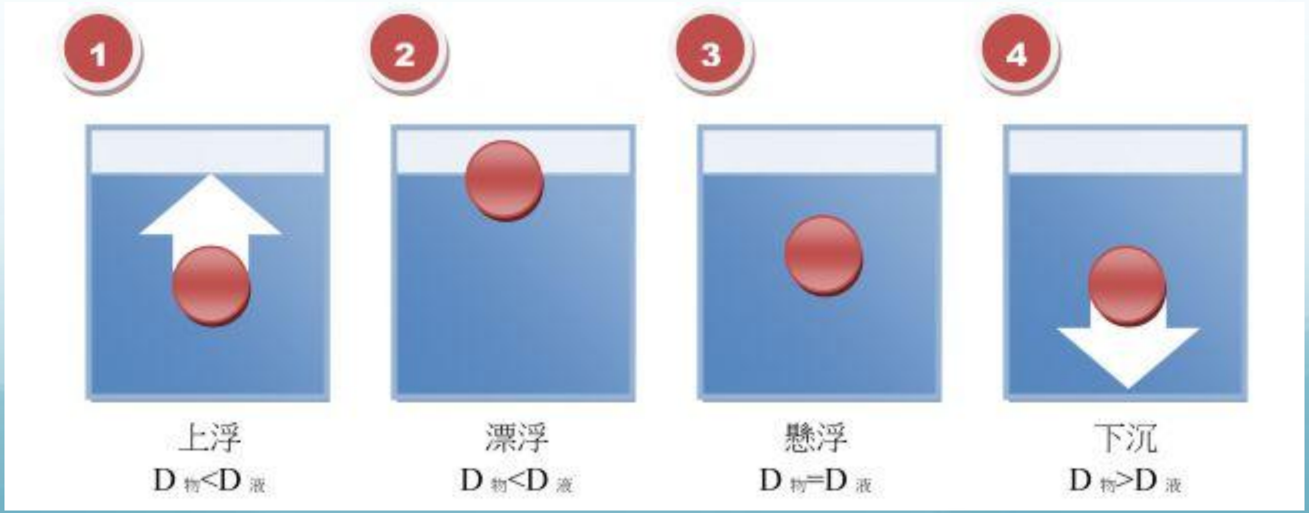
2.4 浮力

在液體中之物體，不論其浮在液面或沉入其中，均有上浮的傾向，此種使物體上浮的垂直作用力即稱為「浮力」。

當浮力的大小恰好等於物體之重量而達到平衡狀態時，則此物體可在液體中隨處靜止或漂浮在液面上。

- 2.4.1 阿基米德原理
- 2.4.2 比重計

- 物體因浮力影響在液體（氣體）中有以下四種狀態：
  - 物體密度小於浸泡液體（氣體）密度時且物體不在液體的表面的狀態稱為「上浮」。
  - 物體密度小於浸泡液體（氣體）密度時且物體在液體的表面的狀態稱為「漂浮」。
  - 物體密度等於浸泡液體（氣體）密度時的狀態稱為「懸浮」。
  - 物體密度大於浸泡液體（氣體）密度時的狀態稱為「下沉」。



2.4.1 阿基米德原理

- 『物理在液體中所受浮力，等於所排開的液體重』

$F_B = \gamma \cdot \forall = \rho \cdot g \cdot \forall$

F_B：浮力

$\forall$ ：物體排開物體或氣體的體積

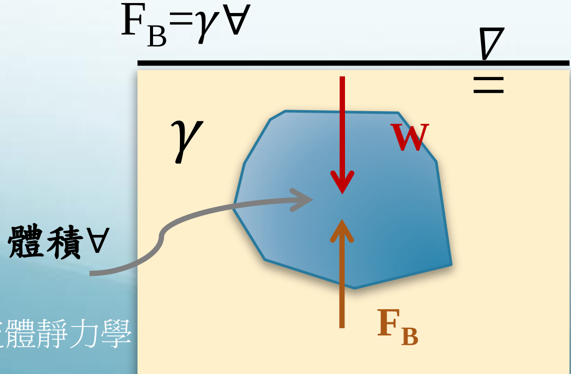
γ：液體或氣體的單位重

ρ：液體或氣體的密度

g：重力加速度

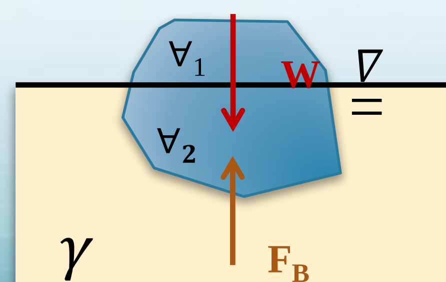
(1) 潛體(沉體)之浮力

$F_B=\gamma\forall$



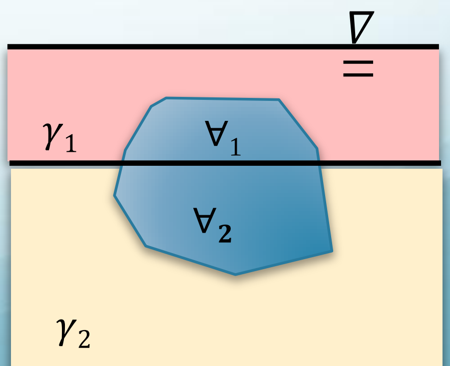
(2) 浮體之浮力

$F_B=\gamma\forall_2$



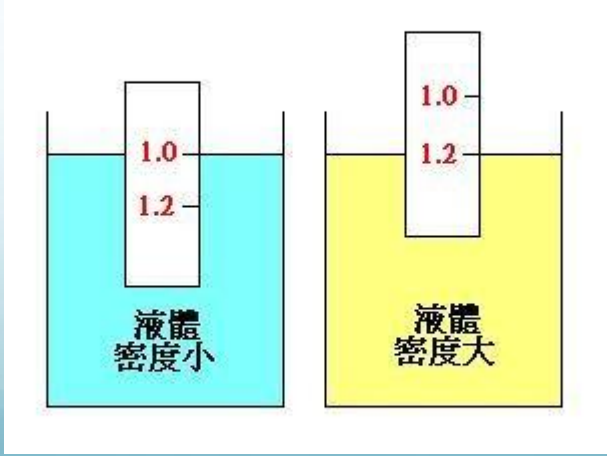
(3) 沉體在兩種比重不同之液體中，其所受浮力

$F_B=\gamma_1\forall_1+\gamma_2\forall_2$



2.4.2 比重計

- 比重計乃利用浮力原理，以測定液體比重之裝置。
- 比重計利用了阿基米德原理：漂浮的固體所受到的浮力等於它排開液體的重量；不同密度的等質量液體中，比重越大的體積越小，所以比重越大，比重計浸入液體中的體積越小，比重計下沉的高度就越少；在低密度的液體，如煤油、汽油和酒精中，比重計將下沉得更深，在高密度的液體，如鹽水、牛奶和酸中，比重計將下沉得淺些。

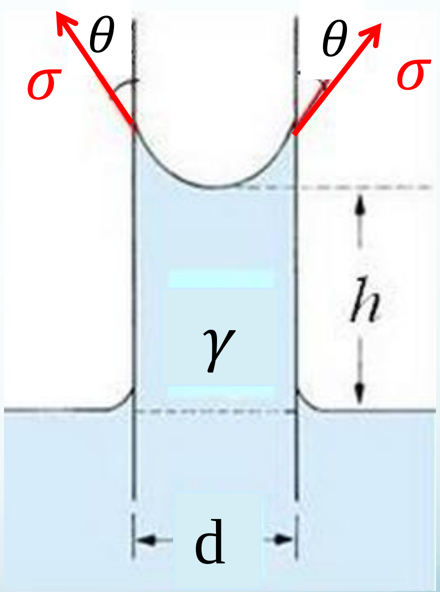


2.5 表面張力

- 針對於玻璃管插入水中的情況，考慮管內比管外高出部分的水柱，其受力圖如右圖所示。因表面張力之合力為零，而垂直方向各力之平衡為

$$\pi \cdot d \cdot \sigma\cos\theta = W = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h \cdot \gamma$$

$$\Rightarrow h = \frac{4\sigma\cos\theta}{\gamma \cdot d}$$



σ= 表面張力 [N/m]
γ=液體之單位重
d = 管之內徑
θ=液面與管壁之接觸角