流體力學

第四章 流體動力學

- 4.1 雷諾傳輸定理(控制體積方程式)
- 4.2 質量守恆(連續方程式)
- 4.3 能量方程式
  - 4.3.1 理想流體之運動
  - 4.3.2一維理想流體之運動方程式
  - 4.3.3柏努利方程式之應用
  - 4.3.4具能量損失之柏努利方程式
- 4.4 動量方程式

- 由於流體不像固體可明顯的分開其個別之顆粒分子來處理其動力問題，因此，乃將焦點集中在流體流動時所流經的空間，稱之為”雷諾輸送理論”或”控制體積法”
- 使用控制體積法時，將涉及以下兩項性質:

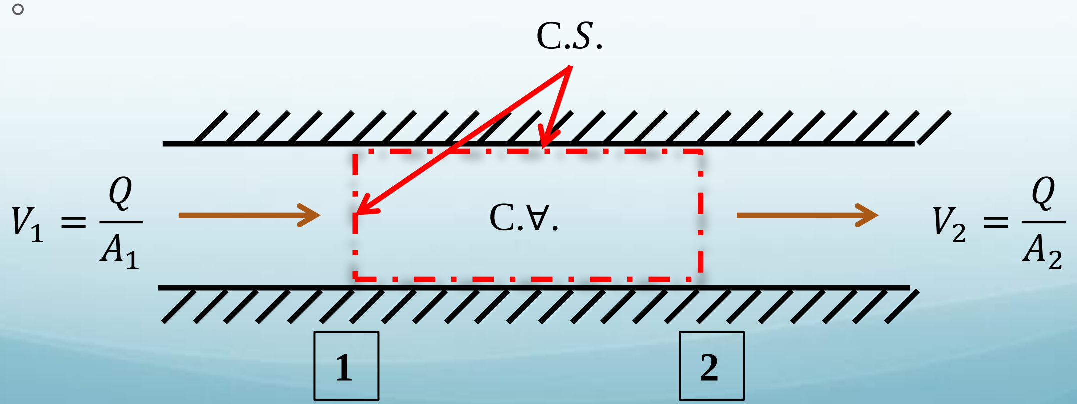
1) 外延性質: 即”與總質量有關的物理性質”，如:動量($M\vec{V}$)、動能($\frac{1}{2}MV^2$)、位能(Mgh)…等，以B來代表外延性質。
2) 內延性質: 即”與總質量無關的物理性質”，如:單位質量之動量($\vec{V}$)、單位質量之動能($\frac{1}{2}V^2$)、單位質量之位能(gh)…等，以β來代表內延性質。

- 在同一系統中之外延性質B與內延性質β間之關係可表之如下:

$$B_{C.\forall} = \int_m \beta \cdot dm = \int_{C.\forall} \beta \cdot \rho \cdot d\forall$$

式中　m=系統之總質量
C.∀=系統之總體積 (即”控制體積”)
ρ=系統之密度

- 控制體積 (control volume):流場中欲考慮範圍之內部，即為控制體積，以C.∀.表示之。
- 控制表面 (control surface):流場中欲考慮範圍之表面，即為控制表面，以C.S.表示之。
- 質量可以自由穿過控制表面，亦即可以自由進出於控制體積的空間，因此控制體積又稱為敞開系統(open system) 。控制體積的大小及形狀完全隨意，然則在一般問題中，通常是使邊界部分與固體邊界相重合，而另外部分與流體流動方向相垂直，為的是使解題得到適當的簡化。



- 因為通過一斷面A之體積流通率(流量)Q為

$$Q=\vec{V}\cdot\vec{A}$$

其中$\vec{V}$=速度向量，$\vec{A}$=面積向量(控制體積之表面向外方向)

- 所以，在控制體積的淨流通率為流體的流出率減去流入率，即

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = V_2A_2 - V_1A_1$$

$$= \overrightarrow{V_2}\cdot\overrightarrow{A_2} + \overrightarrow{V_1}\cdot\overrightarrow{A_1} = \sum_{C.S.}\vec{V}\cdot\vec{A}$$

- 如果上式結果為正，表示流體自控制體積流出；為負，表示流體流入控制體積。如果自外流入控制體與自控制體流出量相同，則 $\sum_{C.S.}\vec{V}\cdot\vec{A}=0$

4.1 雷諾輸送定理 (控制體積方程式)

設 B 為流體的任一性質（如質量、動量等），並以 $\beta = dB/dm$ 表其個體性質 (intensive property)，則對任一系統的 B 性質之時間變化率 $d(B_{\text{syst}})/dt$，與此系統瞬間所在空間定義出之控制體積內的 B 性質 B_{cv} 的時間變化率的關係為

$$\boxed{\frac{d}{dt}(B_{\text{syst}}) = \frac{d}{dt}(B_{cv}) - (\dot{m}\beta)_{\text{out}} + (\dot{m}\beta)_{\text{in}}} \qquad \textbf{(3-2)}$$

其中 $\dot{m}$ 為質量流率，下標 out 及 in 分別代表流出及流入控制面。將上式改以積分形式表示則

$$\frac{d}{dt}(B_{\text{syst}}) = \frac{d}{dt}\int_{C\forall} \beta\rho d\forall + \int_{CS} \beta\rho \vec{V}_r \cdot d\vec{A} \qquad \textbf{(3-3)}$$

其中面積分中之 $d\vec{A}$ 之方向向外（相對於控制體積內部），下標 $C\forall, CS$ 分別代表控制體積及其表面。

$\vec{V}_r$ 為流體相對於控制面的速度；
$\rho\vec{V}_r \cdot d\vec{A}$ 為單位時間內流出面積元素 $d\vec{A}$ 的流體質量

對於式 (3-2) 我們以一簡單的例子予以說明。考慮如圖 3-7 所示之一維的流線管，其中之流速分布為 $V=V(x)$，選取圖中截面 a 與 b 間之流線管作為控制體積，此控制體積是固定不動的。於時間 t 時，系統 2 恰充滿於其中，而於時間 $t+dt$ 時，系統 2 開始流出控制體積而系統 1 則自左開始流入控制體積，若欲找出 B_{cv} 的時間變化率與系統 2 之 B 含量的時間變化率間之關係，由定義

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(B_{CV}) &= \frac{1}{dt}B_{CV}(t+dt)-\frac{1}{dt}B_{CV}(t)\\ &= \frac{1}{dt}[B_2(t+dt)-(\beta\rho d\mathcal{V})_{\text{out}}+(\beta\rho d\mathcal{V})_{\text{in}}]-\frac{1}{dt}[B_2(t)]\\ &= \frac{1}{dt}[B_2(t+dt)-B_2(t)]-(\beta\rho AV)_{\text{out}}+(\beta\rho AV)_{\text{in}}\end{aligned}$$

其中下標 in 及 out 分別表示圖 3-7 中之截面 a 及 b。

在應用上，常取固定形狀的控制體積，而式 (3-3) 可改為

$$\frac{d}{dt}(B_{\text{syst}})=\int_{C\mathcal{V}}\frac{\partial}{\partial t}(\beta\rho)d\mathcal{V}+\int_{CS}\beta\rho\vec{V}_r\cdot d\vec{A} \qquad \textbf{(3-4)}$$

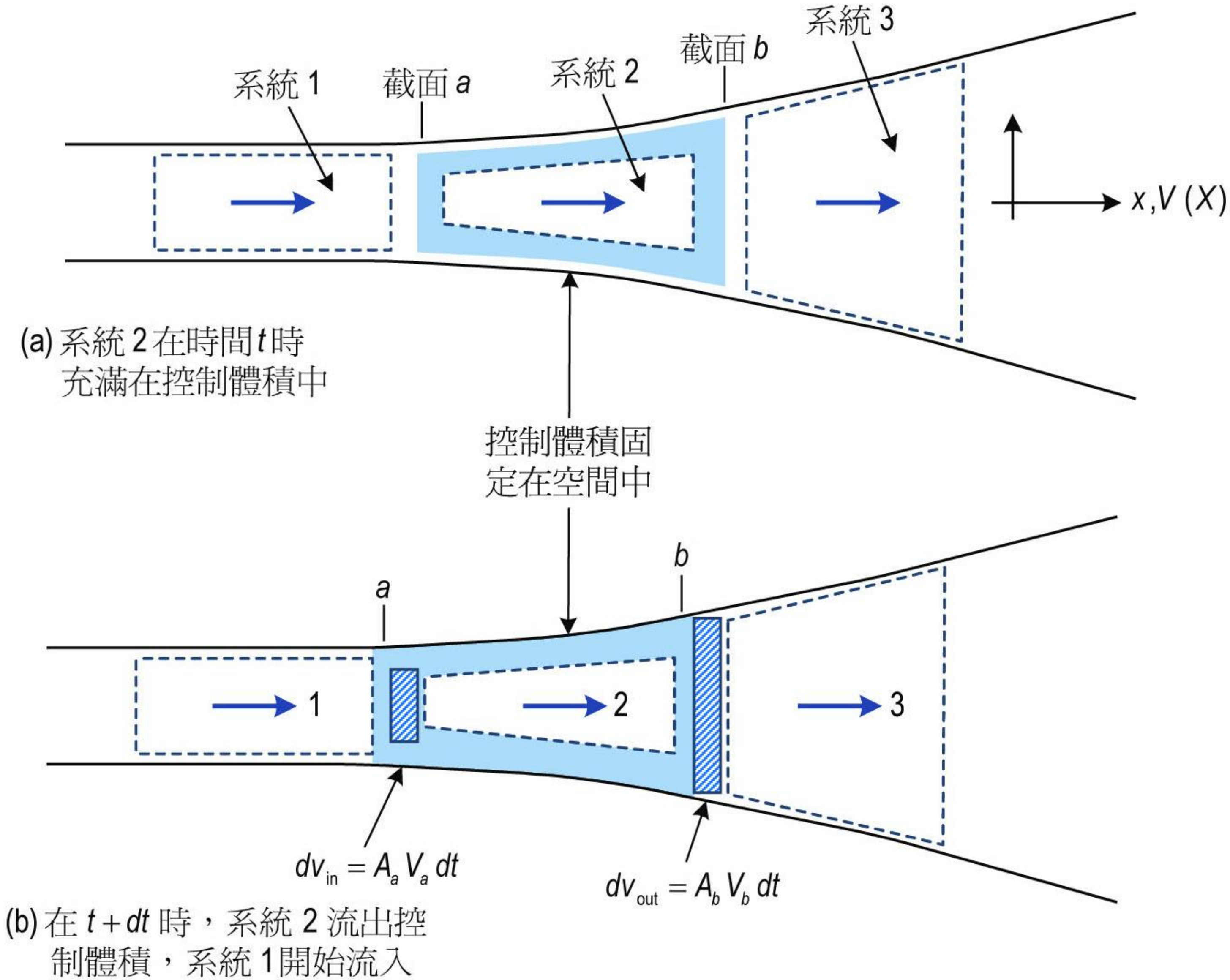


圖 3-7 三個系統流體 —— 控制體積時的流出、流入之情形 ([6] 圖 3-3)

假設流體為不可壓縮者，即$\rho_1=\rho_2$
則 $V_1A_1=V_2A_2$，或$Q_1=Q_2$

4.2 質量守恆(連續方程式)

我們首先應用式 (3-3) 於一系統的質量 m。因一系統為一固定特質，固定質量的集合體，故其質量不隨時間而改變，因此式 (3-3) 中，取 $B=m$, $\beta=\dfrac{dB}{dm}=1$，我們得

$$\frac{d(m_{\text{syst}})}{dt}=\frac{d}{dt}\int_{C\forall}\rho\, d\forall+\int_{CS}\rho\vec{V}_r\cdot d\vec{A}=0 \qquad \textbf{(3-5)}$$

對於固定形狀的控制體積，式 (3-5) 變為

$$\int_{C\forall}\frac{\partial\rho}{\partial t}d\forall+\int_{CS}\rho\vec{V}_r\cdot d\vec{A}=0 \qquad \textbf{(3-6)}$$

上式有時亦稱之為連續方程式。

若流體為不可壓縮者，式 (3-6) 可簡化為

$$\int_{CS}\vec{V}_r\cdot d\vec{A}=0 \qquad \textbf{(3-7)}$$

其中控制面上的 $\vec{V}_r\cdot d\vec{A}$ 稱之為體積流率。注意到式 (3-7) 對於穩定流或不穩定流皆成立。

例4-1

有一均匀圓管直徑120cm，其後接一圓管直徑60cm，若在系統之水流速為2 cms情況下，試問在各管流速為多少?

解

：(1) 直徑 120cm 圓管內之流速：

$$V_{120}=\frac{Q}{A_{120}}=\frac{2}{\frac{\pi}{4}\times(1.20)^2}=1.77\,{}^{m}\!/_{sec}$$

(2) 直徑 60cm 圓管內之流速：

$$V_{60}=\frac{Q}{A_{60}}=\frac{2}{\frac{\pi}{4}\times(0.60)^2}=7.08\,{}^{m}\!/_{sec}$$

例4-2

- 有一噴射流，其射入一開啟桶，而桶側有一孔，流量為0.003 cms，如果噴射流之截面為0.0025m^2，其流速為7m/s，則該開啟桶之質量流率為多少?

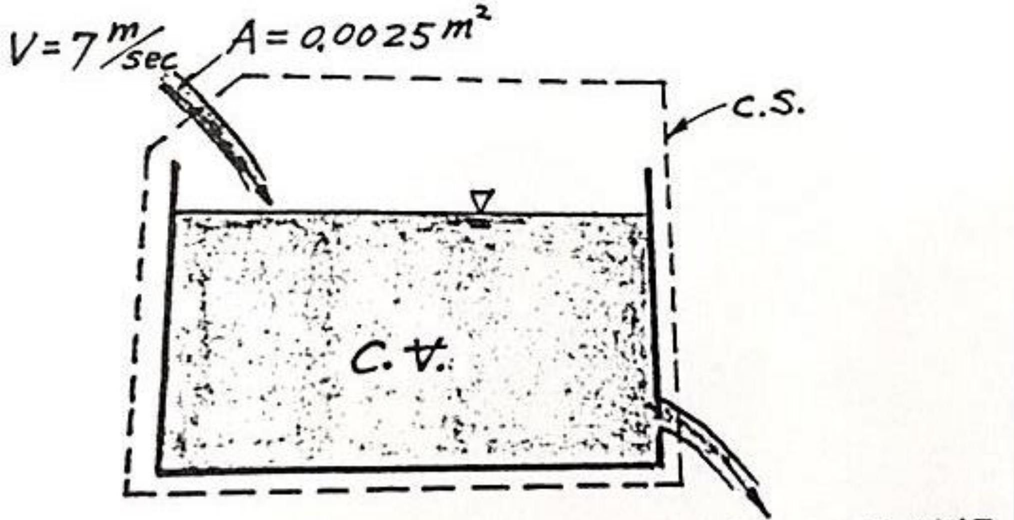


圖 4-6

解

$$\Delta\dot{m} = (\dot{m})_{out} - (\dot{m})_{in}$$

$$= (\rho Q)_{out} - (\rho Q)_{in}$$

$$= 1000 \times 0.003 - 1000 \times 7 \times 0.0025$$

$$= -14.5\ {}^{kg_m}/_{sec}$$

故該系統以 $14.5\ {}^{kg_m}/_{sec}$ 之質量流率填入開啓桶內。

例4-3

- 某一河川以流量Q_{in} = 12000 m^3/sec 流入某水庫，而在水庫下端又以流量Q_{out} = 7500 m^3/sec流出水庫，如果該水庫之截面積為$1.0*10^8$ m^2，則該水庫水位上升或下降速度為若干?

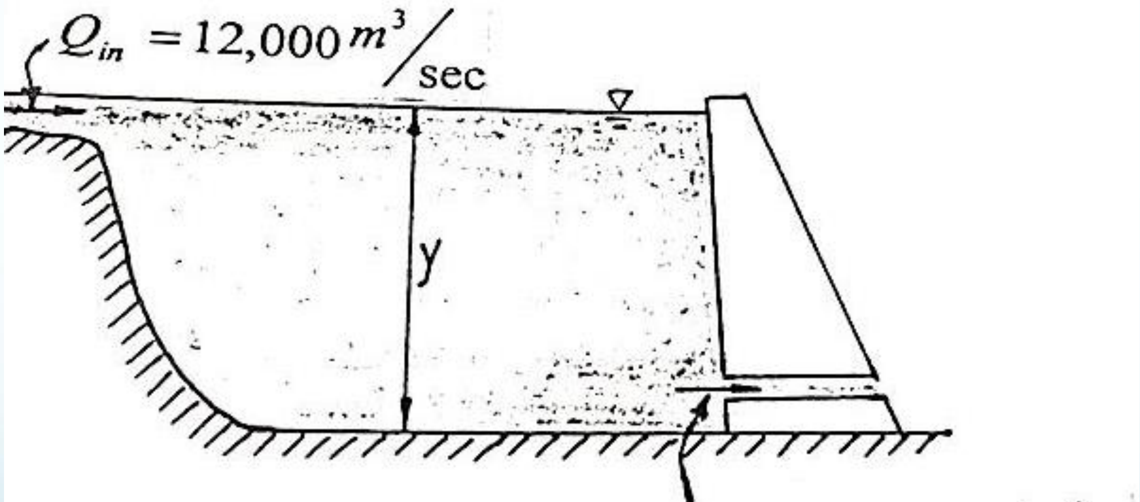


圖 4-7

解

$$\Delta Q = Q_{out} - Q_{in} = 7{,}500 - 12{,}000 = -4{,}500\, {m^3}/{sec}$$

即流入水庫之淨流量爲 $4{,}500\, {m^3}/{sec}$，而其造成水庫水位上升之速率爲：

$$V = \frac{4{,}500}{1.0 \times 10^8} = 4.50 \times 10^{-5}\, {m}/{sec} = 16.2\, {cm}/{hr}$$

例4-4

水流經一交叉管，如圖 3-8 所示，各管截面均為圓形。管 ① 直徑為 30 cm，平均流速為 1.5 m/sec；管 ② 直徑為 20 cm，平均流速為 2.0 m/sec；管 ③ 直徑為 40 cm。若在穩定情況下，流體為不可壓縮的，則管 ③ 之平均流速為若干？

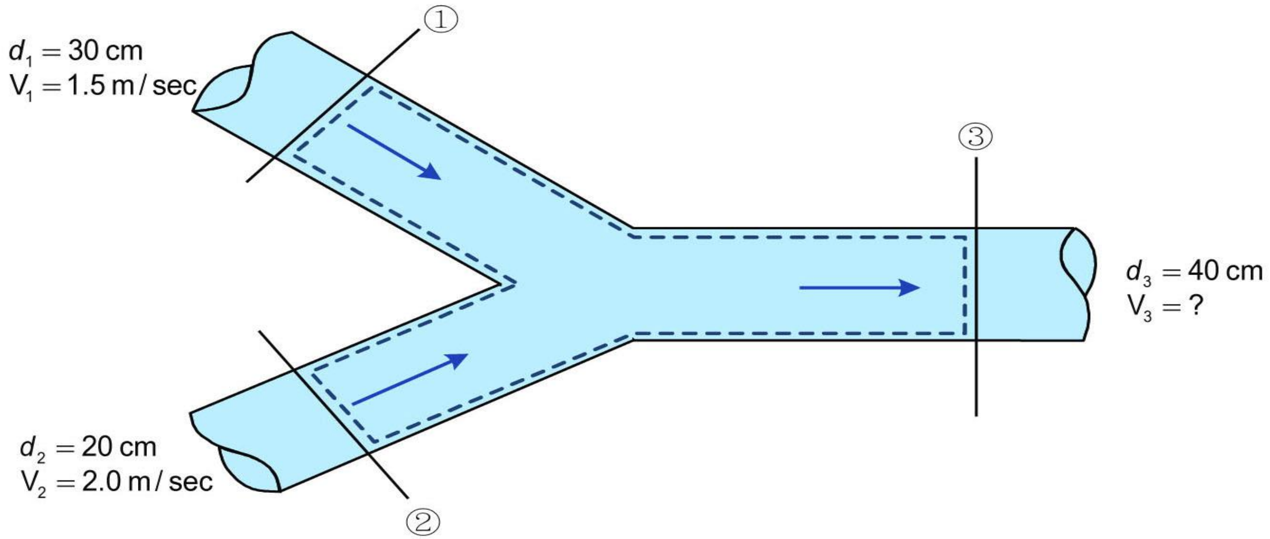


圖 3-8

解 取如圖中虛線所示之控制體積。

由式 (3-5) 的質量守恆

$$\boxed{\int_{CS} \vec{V}_r \cdot d\vec{A} = 0}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{C\forall} \rho d\forall + \int_{CS} \rho \vec{V}_r \cdot d\vec{A} = 0$$

因流動為穩定的，故上式第一項為零。又流體為不可壓縮的，故

計算截面 1, 2 及 3 之體積流率

$$\int_{A1} \vec{V}_r \cdot d\vec{A} = -V_1 A_1$$

$$\int_{A2} \vec{V}_r \cdot d\vec{A} = -V_2 A_2$$

$$\int_{A3} \vec{V}_r \cdot d\vec{A} = +V_3 A_3$$

代入式 (1) 得

$$\int_{CS} \vec{V}_r \cdot d\vec{A} = \int_{A1} \vec{V}_r \cdot d\vec{A} + \int_{A2} \vec{V}_r \cdot d\vec{A} + \int_{A3} \vec{V}_r \cdot d\vec{A}$$

$$= -V_1 A_1 - V_2 A_2 + V_3 A_3 = 0$$

因此，

$$V_3 = (A_1 V_1 + A_2 V_2)/(A_3)$$

$$= \left[\frac{\pi}{4} \times (0.3)^2 \times 1.5 + \frac{\pi}{4} \times (0.2)^2 \times 2.0\right] / \left[\frac{\pi}{4} \times (0.4)^2\right]$$

$$= 1.34 \text{ m/sec}$$

例4-5

一圓管中的穩定流動，軸向速度分布為 $u=U_0(1-r/R)^m$，其中 U_0 為管中心線流速，R 為半徑，m 為一常數，而 r 為自管中心線向外之徑向距離。則管截面上的平均軸向流速 U_{av} 為何？

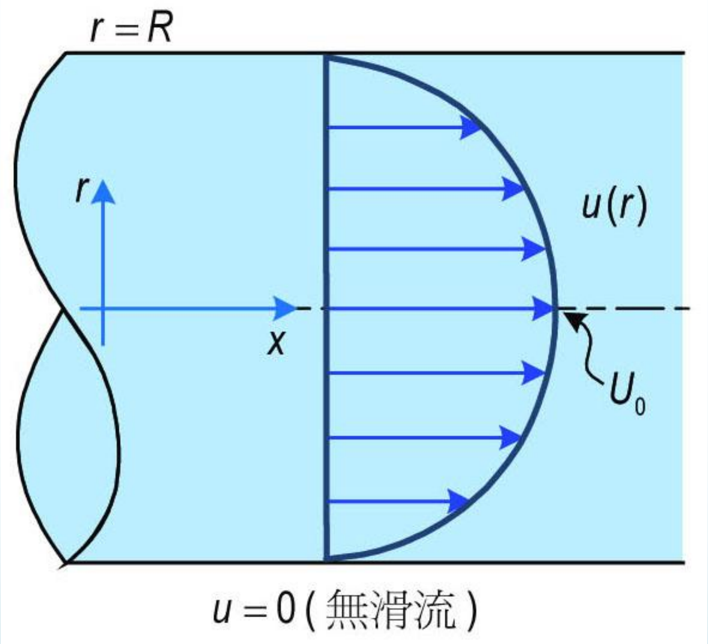


圖 3-9

解 由定義知圓管截面 A 上之平均流速為

$$U_{av} = \frac{1}{A}\int \vec{V}_r \cdot d\vec{A}$$

$$= \frac{1}{A}\int u dA = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R U_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)^m \cdot 2\pi r dr$$

或

$$U_{av} = U_0 \cdot \frac{2}{(1+m)(2+m)}$$

4.3 能量方程式

- 4.3.1 理想流體之運動
- 4.3.2 一維理想流體之運動方程式
- 4.3.3柏努利方程式之應用
- 4.3.4具能量損失之柏努利方程式

4.3.1 理想流體之運動

- 理想流體之基本定義為無壓縮性(密度ρ=定值)且無黏度(動力黏度μ=0)，此種流體實際上並不存在於真實流體中；但對於某些物理問題，流體之壓縮性效應及黏滯性效應很小，為了研究方便，常將流體當作理想流體，可使問題大大簡化，且所得之結果誤差很小，適合實際應用需要。

- 流體運動時所受之力可分為正向力、剪力及重力。正向力通常指的是壓力，而剪力則是由於流體的黏滯性所造成。因此，理想流體與真實流體之運動方程式可簡單區別如下:

1. 理想流體：合力=質量 * 加速度 = 壓力 + 重力

2. 真實流體：合力=質量 * 加速度 = 壓力 + 重力 + 剪力

4.3.2 一維理想流體之運動方程式

- 尤拉方程式
- 柏努利方程式

考慮圖 3-10 所示之流體元素，截面積為 dA，長度為 ds。該元素受各種力量作用而產生加速度，各力大小如下：

1. 元素兩端所受壓力分別為 pdA 及 $(p+dP)dA$，其沿流動方向之淨力為：

$$PdA-(P+dP)dA=-dPdA$$

2. 元素本身之重力為 $\gamma dAds$，垂直向下，其與流動方向夾 θ 角，因此重力沿流動方向之分量為：

$$-\gamma dAds\cos\theta=-\gamma dAds\frac{dz}{ds}$$

其中 $$\cos\theta=\frac{dz}{ds}$$

3. 元素由於滑動所生之摩擦力，係由液體黏性剪應力所引起，本節為使問題簡化，摩擦力暫時省略不計，

$$\tau=0$$

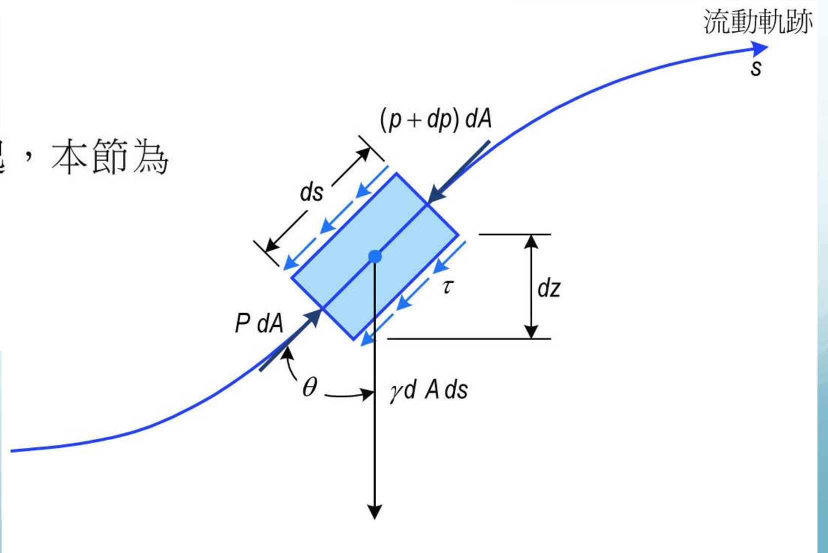


圖 3-10　流體元件之運動

4. 以上 1.~3. 項之代數和應等於流體因運動而產生之慣性力。

$$ma_s = \frac{\gamma}{g} d\forall a_s = \frac{\gamma}{g} dAdsa_s$$

其中 m 為元素質量，a_s 為沿流線運動方向之加速度。依據牛頓第二運動定律，上列各力之關係為：

$$\underset{\text{壓力}}{-dPdA} - \underset{\text{重力}}{\gamma dAds\frac{dz}{ds}} - \underset{\text{摩擦力}}{0} = \underset{\text{慣性力}}{\frac{\gamma}{g} dAdsa_s}$$

將上式整理並乘以 $1/\gamma dAds$ 後，得

$$\frac{1}{\gamma}\frac{dP}{ds} + \frac{dz}{ds} + \frac{1}{g} a_s = 0 \qquad \textbf{(3-8)}$$

設 v 為沿流線運動方向之速度，其為 s 及 t 之函數，亦即 $v=v(s,t)$ ，則 $a_s=dv/dt$ ，所以

$$a_s=\frac{dv}{dt}=\frac{1}{dt}\left(\frac{\partial v}{\partial s}ds+\frac{\partial v}{\partial t}dt\right)$$
$$=\frac{ds}{dt}\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}=v\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}$$

代入 (3-8) 式，得

$$\frac{1}{\gamma}\frac{dP}{ds}+\frac{dz}{ds}+\frac{1}{g}\left(v\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial t}\right)=0 \qquad \textbf{(3-9)}$$

假設流動為一穩定流 $\partial v/\partial t=0$。將此關係代入 (3-9) 式，吾人可得穩定且無摩擦流動之尤拉方程式 (Euler's equation)

$$\frac{1}{\gamma}\frac{dP}{ds}+\frac{dz}{ds}+\frac{v}{g}\frac{\partial v}{\partial s}=0 \qquad \textbf{(3-10)}$$

若更進一步假設流體為均勻且不可壓縮，則密度 ρ 等於常數，將式 (3-10) 沿流線對 s 積分，得到

$$\frac{P}{\gamma}+z+\frac{v^2}{2g}=\text{常數}$$

此即伯努利方程式 (Bernoulli's equation)。由伯努利方程式的推導過程知，下列三項事實：

(1) 在使用伯努利方程式時，必須是沿同一流線，流場為穩定、無摩擦且均勻不可壓縮的。

(2) 式 (3-11) 中各項，一般俗稱 P/γ 為壓力頭 (pressure head)，z 為高度頭 (elevation head)，$v^2/2g$ 為速度頭 (velocity head)，$P/\gamma+z$ 稱為靜壓頭 (piezometric head)，而三項之總和稱為總壓力頭 (total head) 或總水頭。伯努利方程式之物理意義可以圖 3-11 說明，流體沿一流線管流動，停滯管 (stagnation tube) 中流線所能上升的高度稱為總能量線 (total energy line)、靜壓管 (piezometric tube) 中流體所能上升的高度稱為壓力線 (pressure line)，不管在那一點，壓力線皆位於總能量線下方 $v^2/2g$ 距離處。

(3) 在事實 (1) 的限制下，在流線上任取 1、2 兩點，吾人利用式 (3-8) 可計算兩點間之水頭差。

$$\frac{P_1}{\gamma}+z_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}+z_2+\frac{v_2^2}{2g}$$

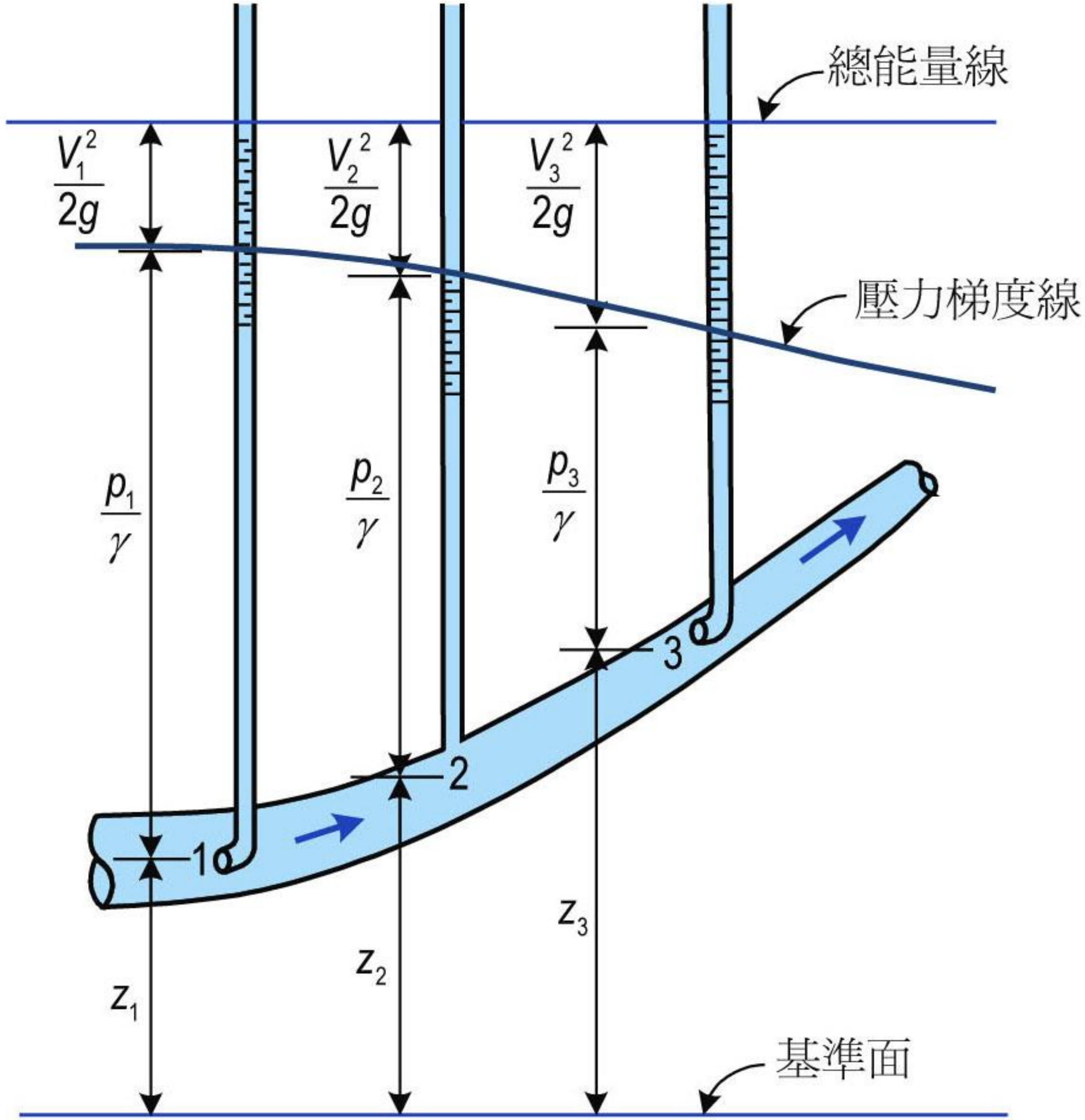


圖 3-11 伯努利方程式的圖解表示

如圖 4-8，考慮上、下游兩斷面之能量關係，可得下式：

$$\frac{P_1}{\gamma_1}+\alpha_1\frac{\bar{V}_1^2}{2g}+z_1+h_p=\frac{P_2}{\gamma_2}+\alpha_2\frac{\bar{V}_2^2}{2g}+z_2+h_t+h_L$$

式中　P_1，P_2 = 斷面 1、斷面 2 之壓力

$\bar{V}_1$，$\bar{V}_2$ = 上、下游之平均流速

z_1，z_2 = 上、下游之高程

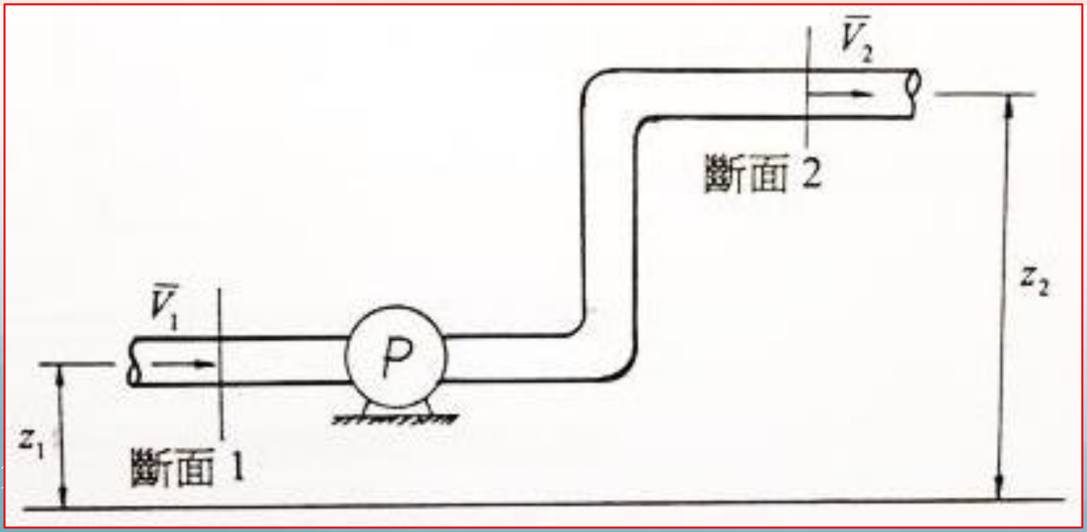
α_1，α_2 = 能量校正係數(Kinetic–energy–correction factor)

γ_1，γ_2 = 上、下游流體單位重

h_p =抽水機水頭(單位重量流體所得到之機械功)

h_t =水輪機水頭(單位重量流體輸出之機械功)

h_L =能量損失水頭



若$\alpha_1=\alpha_2=1$，且
$h_P=h_t=h_L=0$
(代表”不涉及抽水機、水輪機，且無能量損失”)

Bernoulli equation (柏努利方程式)

$$\boxed{\frac{P_1}{\gamma}+z_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}+z_2+\frac{v_2^2}{2g}}$$

壓力頭　高度頭　速度頭

例4-6

如圖 3-12 所示之管路，水在 10°C 時由截面 ① 流經截面 ②，若截面 ① 之管內徑為 25 mm，錶壓力為 345 kPa，流速為 3 m/sec，而截面 ② 位於截面 ① 上方 2 m 處，管內徑為 50 mm，假設系統無能量損失，求截面 ② 之流速及壓力。10°C 水之比重量為 $\gamma = 9.81\,\mathrm{kN/m^3}$ 。

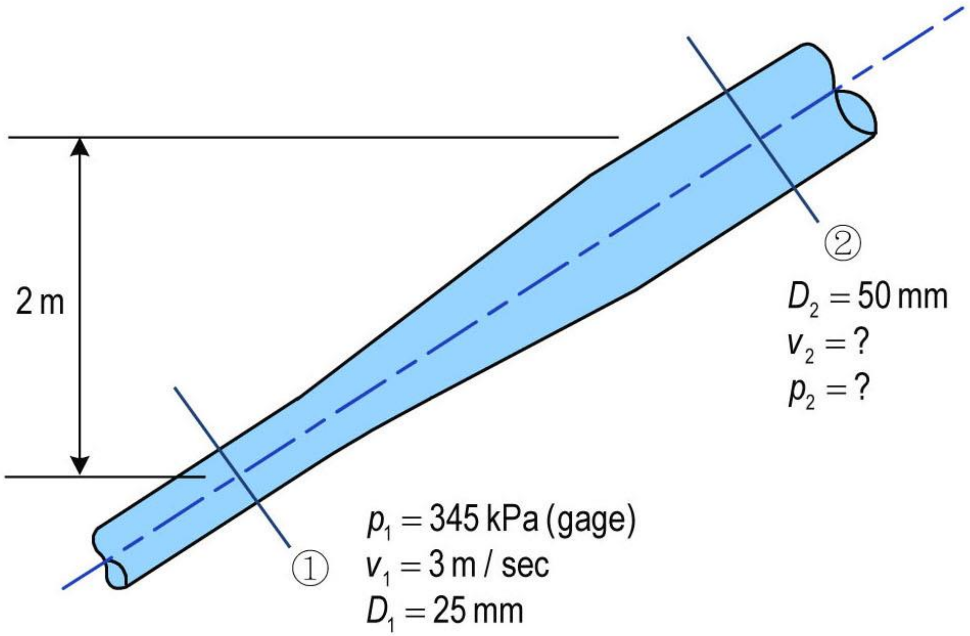


圖 3-12

解 由連續方程式知

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

即 $$\frac{\pi}{4}\left(\frac{25}{1000}\right)^2 \times 3 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{50}{1000}\right)^2 \times v_2$$

故 $$v_2 = 0.75\ \text{m/sec}$$

若以截面 ① 為基準面，則 $z_1 = 0$ 且 $z_2 = 2\ \text{m}$ 。由伯努利方程式知

$$\frac{P_1}{r} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{r} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

即 $$\frac{345}{9.81} + 0 + \frac{3^2}{2 \times 9.81} = \frac{P_2}{9.81} + 2 + \frac{0.75^2}{2 \times 9.81}$$

故 $$P_2 = 329.6\ \text{kPa (gage)}$$

例4-7

如圖 3-13 所示之虹吸管，直徑 $d = 40$ mm 噴嘴出口處之直徑為 25 mm。假設系統沒有能量損失，且水位維持不變，試求：(a) 排水量為多少 m^3/sec；(b) 點 B, C, D, E 處之壓力。

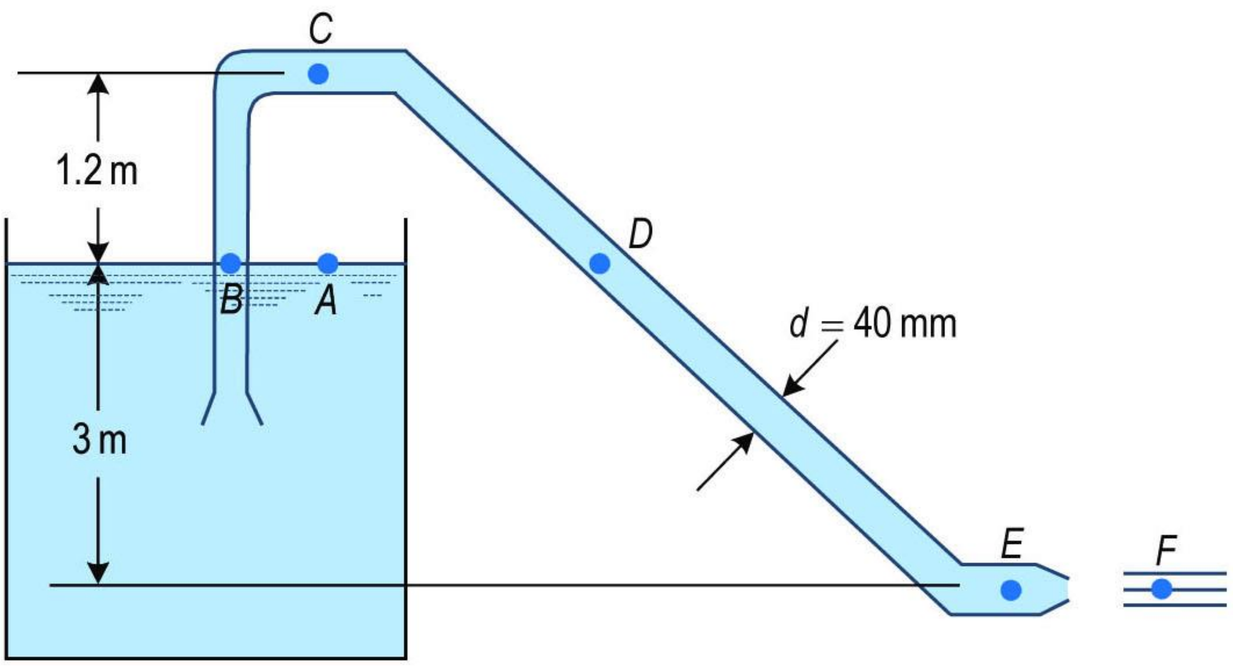


圖 3-13

解 (a) 如圖所示，取 A, F 兩點考慮，則因池斷面較大流速可以假設 $v_A \doteqdot 0$，且兩點均為大氣壓力，故 $P_A = P_F = 0$（ 錶壓力 ），若以 F 點為基準面，則 $z_A = 3, z_F = 0$，故利用伯努利方程式

$$0 + 3 + 0 = 0 + 0 + \frac{v_F^2}{2 \times 9.81}$$

則

$$v_F = \sqrt{2 \times 9.81 \times 3} = 7.672 \text{ m/sec}$$

故虹吸管之流量為

$$Q = v_F A_F = 7.672 \times \frac{\pi}{4}\left(\frac{25}{1000}\right)^2$$

$$= 3.77 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{sec}$$

(b) 虹吸管中之流速為

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{3.77 \times 10^{-3}}{\frac{\pi}{4}\left(\frac{40}{1000}\right)^2} = 3.0\ \text{m/sec}$$

取 A, B 兩點考慮，則 $P_A = 0\,(\text{gage}), v_A \doteqdot 0, v_B = 3, z_A = z_B = 0$，故由伯努利方程式知

$$0 + 0 + 0 = \frac{P_B}{9.81} + 0 + \frac{3^2}{2 \times 9.81}$$

得 $$P_B = -4.5\ \text{kPa (gage)}$$

取 A,C 兩點考慮，則 $P_A=0(\text{gage}), v_A \doteqdot 0, V_C=3\ \text{m/sec}$ ，以 A 點當基準，則 $z_A=0, z_C=1.2\ \text{m}$ ，故由伯努利方程式知

$$0+0+0=\frac{P_C}{9.81}+1.2+\frac{3^2}{2\times 9.81}$$

可得 $$P_C=-16.27\ \text{kPa}\,(\text{gage})$$

取 A,D 兩點考慮，則 $P_A=0(\text{gage}), v_A \doteqdot 0, v_D=3\ \text{m/sec}, z_A=z_D=0$，故

$$0+0+0=\frac{P_D}{9.81}+0+\frac{3^2}{2\times 9.81}$$

可得 $$P_D=-4.5\ \text{kPa}\,(\text{gage})=P_B$$

取 A,E 兩點考慮，則 $P_A=0(\text{gage}), v_A \doteqdot 0, v_E=3\ \text{m/sec}$ ，以 E 點當基準點，則 $z_A=3\ \text{m}, z_E=0$ ，故由伯努利方程式知

$$0+3+0=\frac{P_E}{9.81}+0+\frac{3^2}{2\times 9.81}$$

得 $$P_E=24.93\ \text{kPa}\,(\text{gage})$$

例4-8

試求圖 3-14 中經水槽小孔噴出之水流速度及流量。

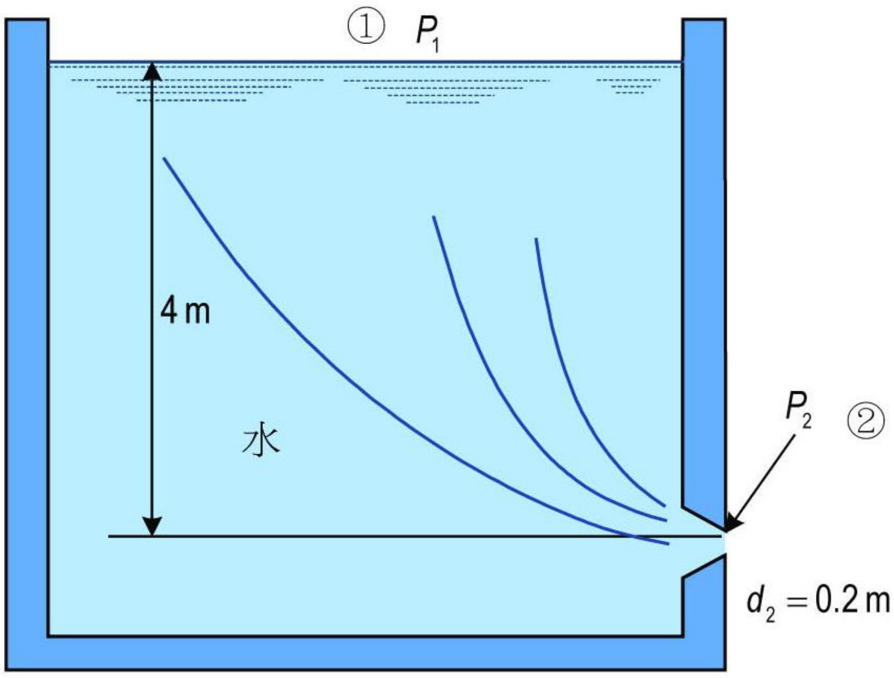


圖 3-14

解 選水槽水面為點 ①，小孔出口為點 ②，因 ①、② 皆與大氣接觸，因此 $P_1 = P_2 = P_{atm}$ 或 $P_1 = P_2 = 0(\text{gage})$。另由於水槽面積遠大於小孔，因此 $v_1 \fallingdotseq 0$，代入伯努利方程式，可得

$$0 + 4 + 0 = 0 + 0 + \frac{v_2^2}{2 \times 9.81}$$

即

$$v_2 = \sqrt{2 \times 4 \times 9.81} = 8.86\ \text{m/sec}$$

$$Q = A_2 v_2 = \frac{\pi}{4}(0.2)^2 \times 8.86 = 0.278\ \text{m}^3/\text{sec}$$

例4-9

一水槽有兩個出口 (a) 一直徑為 D 的圓滑排水口 A 及 (b) 一圓滑入口直徑為 D 而長 L 之排水管 B，如圖 3-16 所示。若水槽水位高 H，求 (a) 兩出口 A 及 B 之水流量 (b) 如圖中點 1 及點 2 處之流速。

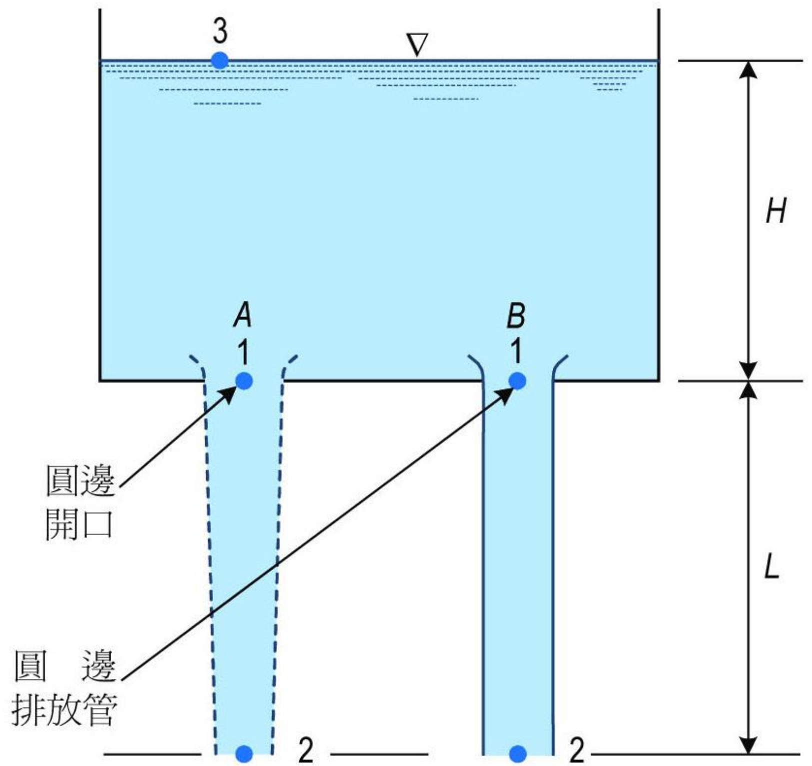


圖 3-16 ([10] 圖 E4.13)

解 (a) 對於排水孔 A：

應用伯努利方程式於點 3 及點 1

$$0+0+H=\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_{1a}^2}{2g}+0$$

因排水至大氣，故 $p_1/\gamma=0$（錶壓）。

因此 $V_{1a}=\sqrt{2gH}$，流量 $Q_a=\frac{\pi}{4}D^2\sqrt{2gH}$。

在點 2 處之壓力為大氣壓，因此應用伯努利方程式於點 3 及點 2 之間

$$0+0+(H+L)=0+\frac{V_{2a}^2}{2g}+0$$

或 $$V_{2a}=\sqrt{2g(H+L)}$$

(b) 對於排水管 B：

應用伯努利方程式於點 3 及點 2 之間：

$$0+0+(H+L)=0+\frac{V_{2b}^2}{2g}+0$$

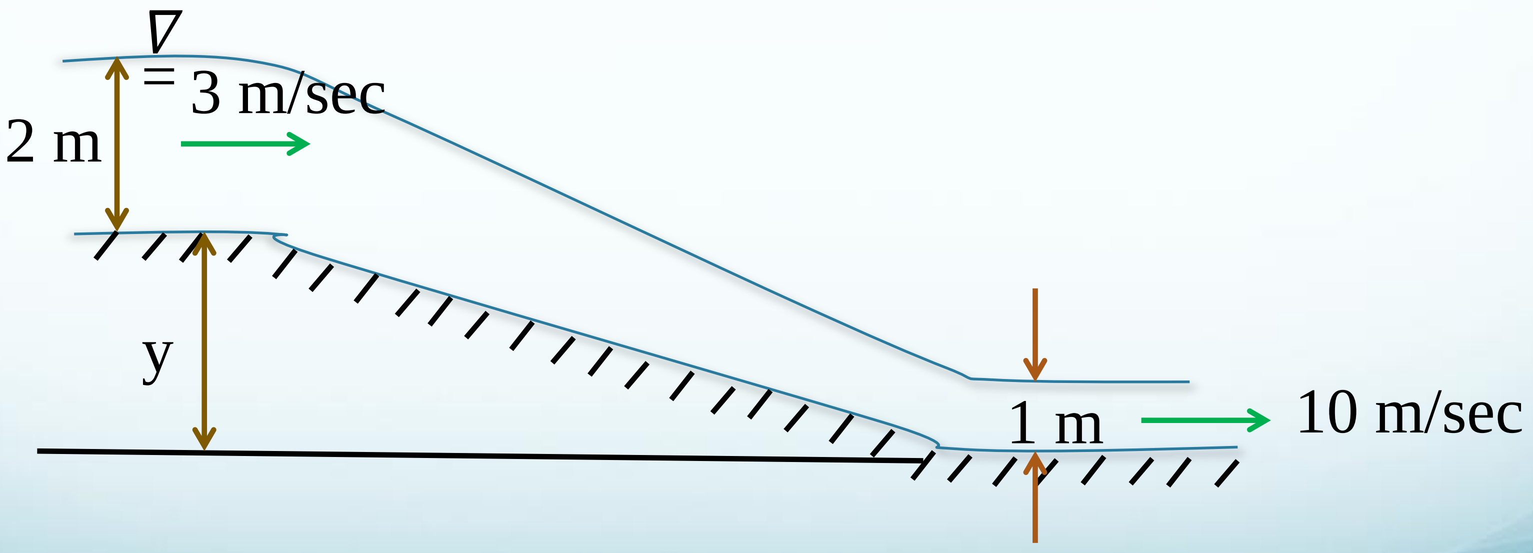
或 $$V_{2b}=\sqrt{2g(H+L)}$$

因排水管口徑不變，故由連續方程式知：

$$V_{1b}=V_{2b}=\sqrt{2g(H+L)}$$

例4-10

水流入明渠中，深度為2m，速度為3 m/sec，再流入收縮瀉槽而達到另一明渠，其深度為1m，速度為10 m/sec。假設流動無摩擦，試決定兩渠底的高度差。



解

假設兩渠底的高度差為y，分別取兩渠之自由液面(1)處與(2)處，依Bernoulli equation

$$\frac{P_1}{\gamma}+z_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}+z_2+\frac{v_2^2}{2g}$$

則$P_1=P_2=0$ (與大氣接觸)

$z_1=y+2$，$z_1=1$

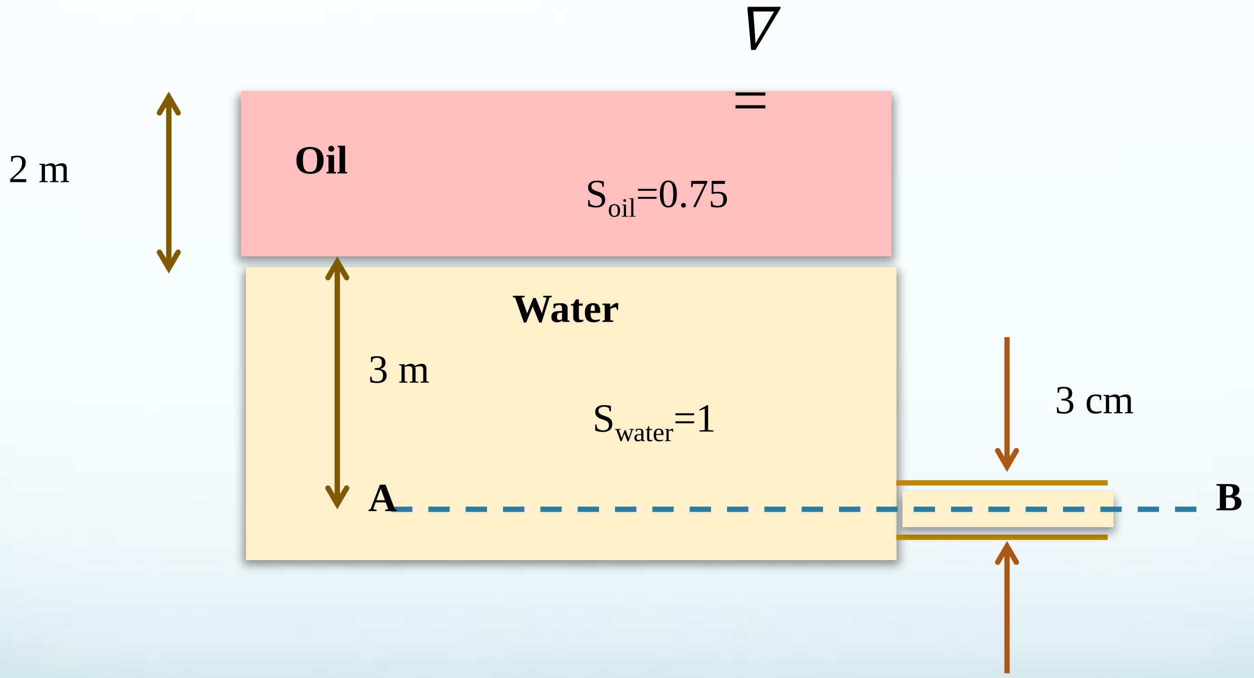
$V_1=3\text{m/sec}$，$V_2=10\text{m/sec}$

代入得 $0+(y+2)+\frac{3^2}{2*9.81}=0+1+\frac{10^2}{2*9.81}$

解得 y=3.64 m

例4-11

- 如右圖所示，試求出口之理論流量。



解

(1) 計算點A處之壓力P_A，利用靜壓力原理

$P_A=(0.75*9.81)*2+9.81*3=44.15\ kN/m^2$

(2) 取點A、點B兩處，依Bernoulli equation

$$\frac{P_1}{\gamma}+z_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}+z_2+\frac{v_2^2}{2g}$$

式中 $z_A=z_B$

$V_A= 0$ (距出口較遠，可視該處流體不運動)

$P_A=44.15\ kN/m^2$，PB=0 (與大氣接觸)，$\gamma=9.81\ kN/sec$

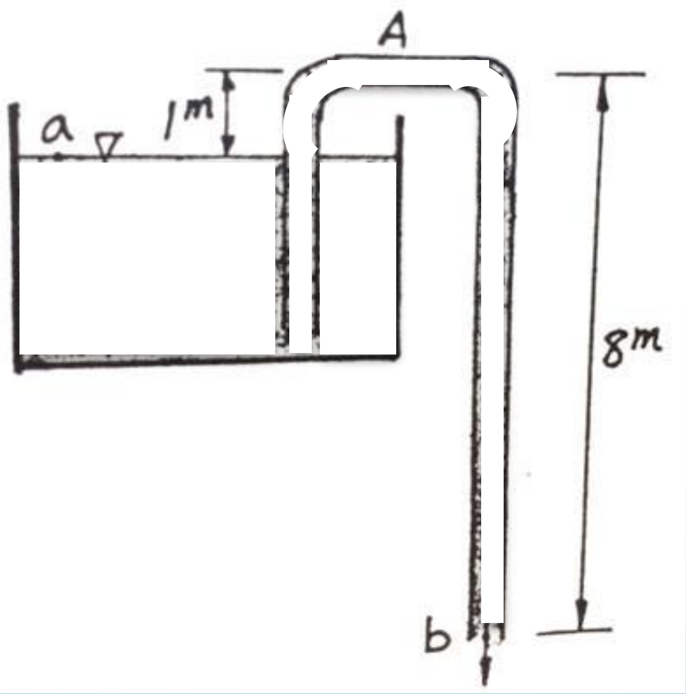
代入上式得 $\frac{44.15}{9.81}+0=0+\frac{V_B{}^2}{2*9.81}$ ，$V_B=9.4\ m/sec$

(3) 計算出口之理論流量 $Q=V_B*A_B$

$Q=9.4*[\frac{\pi}{4}*0.03^2]=6.64*10^{-3}\ m^3/sec = 6.64\ l/sec$

例4-12

一U型管以虹吸方式將水由桶中吸出，試求水流噴出之流速，及管中A點之壓力各若干? (假設水之密度為999 kg/m^3)



解

(1) 取自由水面 a 及噴口 b

依 Bernoulli equation：

$$\frac{P_a}{\gamma}+z_a+\frac{\overline{V}_a^{\,2}}{2g}=\frac{P_b}{\gamma}+z_b+\frac{\overline{V}_b^{\,2}}{2g}$$

其中 $p_a=p_b=0$ （∵與大氣接觸）

$$z_a=8-1=7m$$

$$z_b=0$$

$$\overline{V}_a=0$$

$$\gamma=999\times 9.81=9800.19\,N/m^3$$

$$g=9.81\,m/\sec^2$$

代入原式後，得

$$0+7+0=0+0+\frac{\overline{V}_b^{\,2}}{2\times 9.81}$$

$\therefore \overline{V}_b=\sqrt{2\times 9.81\times 7}=11.7\,m/\sec$ ………水流噴出之流速

(2) 取噴口 b 及管中 A 點，依 Bernoulli equation：

$$\frac{P_b}{\gamma}+z_b+\frac{\overline{V}_b^{\,2}}{2g}=\frac{P_A}{\gamma}+z_A+\frac{\overline{V}_A^{\,2}}{2g}$$

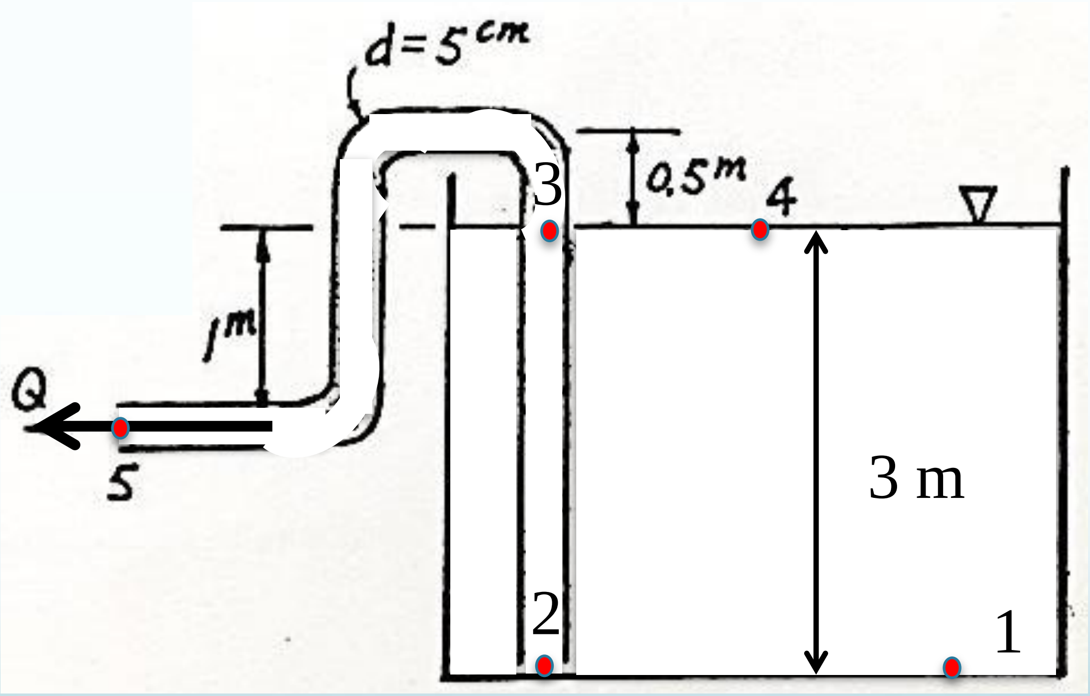
$$0+0+\frac{(11.7)^2}{2\times 9.81}=\frac{P_A}{9800.19}+8+\frac{(11.7)^2}{2\times 9.81}$$

解得 $P_A=-78401.5\,N/m^2$

$$=-78.4\,kN/m^2=-78.4kPa$$

例4-13

管徑5 cm之虹吸管將水由水箱中吸出，假設摩擦損失不計，試求流量Q，以及點1、2、3之壓力。



解

(1) 利用點 4 及點 5 間之 Bernoulli equation：

$$\frac{P_4}{\gamma}+z_4+\frac{\overline{V}_4^{\,2}}{2g}=\frac{P_5}{\gamma}+z_5+\frac{\overline{V}_5^{\,2}}{2g}$$

$$0+1+0=0+0+\frac{\overline{V}_5^{\,2}}{2\times 9.81}$$

$$\overline{V}_5=\sqrt{2\times 9.81\times 1}=4.43\,{}^{m}\!/_{\text{sec}}$$

$$\therefore Q=\overline{V}_5\times\frac{\pi}{4}d^2=4.43\times\frac{\pi}{4}\times(0.05)^2=0.00870\,{}^{m^3}\!/_{\text{sec}}$$

(2) 點 1 之壓力 P_1：

$$P_1=\gamma h=9.81\times 3=29.43\,{}^{kN}\!/_{m^2}$$

(3) 點 2 之壓力 P_2：

利用點 2 及點 4 間之 Bernoulli equation

$$\frac{P_2}{\gamma}+z_2+\frac{\overline{V}_2^2}{2g}=\frac{P_4}{\gamma}+z_4+\frac{\overline{V}_4^2}{2g}$$

$$\frac{P_2}{9.81}+0+\frac{(4.43)^2}{2\times 9.81}=0+3+0$$

解得 $P_2=19.6\,{}^{kN}\!/_{m^2}$

(4) 點 3 之壓力 P_3：

利用點 3 及點 4 間之 Bernoulli equation

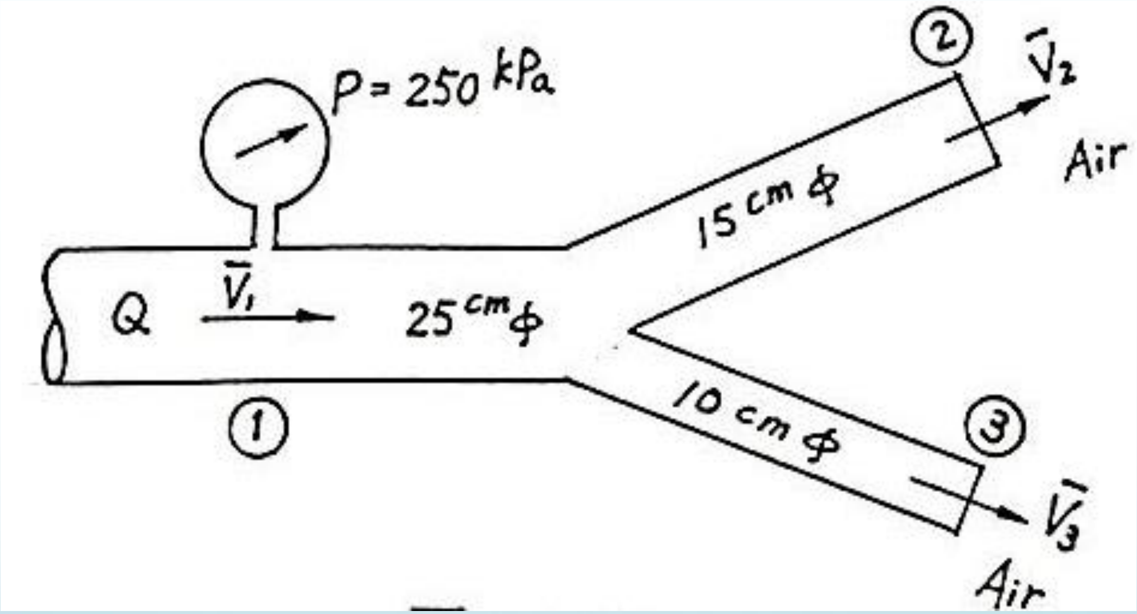
$$\frac{P_3}{\gamma}+z_3+\frac{\overline{V}_3^2}{2g}=\frac{P_4}{\gamma}+z_4+\frac{\overline{V}_4^2}{2g}$$

$$\frac{P_3}{9.81}+0+\frac{(4.43)^2}{2\times 9.81}=0+0+0$$

解得 $P_3=-9.81\,{}^{kN}\!/_{m^2}$

例4-14

水流進直徑25cm的管，通過Y型出口。Y型出口的一支管為直徑15cm，另一支管為直徑10cm，所有管均在同一水平面上，假設沒有流動的能量損失，試計算其流量Q。



解

由連續方程式

$$Q = Q_2 + Q_3$$

$$\frac{\pi}{4}\times(0.25)^2\times\overline{V}_1 = \frac{\pi}{4}\times(0.15)^2\times\overline{V}_2 + \frac{\pi}{4}\times(0.10)^2\overline{V}_3$$

$$25\overline{V}_1 = 9\overline{V}_2 + 4\overline{V}_3 \text{------------}(1)$$

由①、②間之 Bernoulli equation：

$$\frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{\overline{V}_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{\overline{V}_2^2}{2g} \text{--------------}(2)$$

由②、③間之 Bernoulli equation：

$$\frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{\overline{V}_2^2}{2g} = \frac{P_3}{\gamma} + z_3 + \frac{\overline{V}_3^2}{2g} \text{-------------}(3)$$

$\because z_1 = z_2 = z_3$(在同一水平面上)

$P_2 = P_3 = 0$(與大氣接觸)

代入(3)式，得$\overline{V}_2 = \overline{V}_3$，將之代入(1)式

$25\overline{V}_1 = 13\overline{V}_2 \quad \therefore \overline{V}_1 = 0.52\overline{V}_2$

故(2)式可寫成：

$$\frac{P_1}{\gamma} + \frac{\overline{V}_1^2}{2g} = \frac{\overline{V}_2^2}{2g}$$

$$\frac{250}{9.81} + \frac{(0.52\overline{V}_2)^2}{2\times 9.81} = \frac{\overline{V}_2^2}{2\times 9.81}$$

解得 $\overline{V}_2 = 26.2\,{}^{m}/_{\text{sec}}$

$\overline{V}_1 = 13.6\,{}^{m}/_{\text{sec}}$

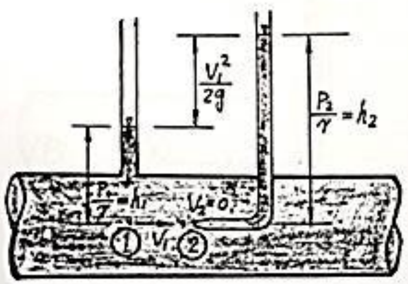
$$\therefore Q = \overline{V}_1 A_1 = 13.6\times\frac{\pi}{4}\times(0.25)^2 = 0.668\,{}^{m^3}/_{\text{sec}}$$

4.3.3 柏努利方程式之應用

- **皮托管**

用以量測流體流動速度之一種器具，其所依據之原理即為 Bernoulli equation。

皮托管之裝置如圖 5-4。



P_1：靜壓力(static pressure)

P_2：停滯壓力(stagnation pressure)

圖 5-4　皮托管

以一彎曲成直角之玻璃管置入水平流動之流體，前端開口處點②之速度為零(即水流在點②處為靜止)，此點稱為停滯點(stagnation point，或稱〝駐點〞)，而其壓力稱為停滯壓力(stagnation pressure；或稱〝駐壓〞)。若流線於點①至點②之間無能量損失，則由 Bernoulli equation 得

$$\frac{P_1}{\gamma}+z_1+\frac{V_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}+z_2+\frac{V_2^2}{2g}$$

式中 $z_1=z_2$，$V_2=0$

故上述公式可簡化為

$$\frac{V_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}-\frac{P_1}{\gamma}$$

$$V_1=\sqrt{2g\cdot(\frac{P_2}{\gamma}-\frac{P_1}{\gamma})}$$

$$=\sqrt{2g(h_2-h_1)}$$

文氏管

用來量度流量之量計。其原理是根據流線受到約束，壓力可因流體經過約束處流速改變，使壓力降低，因此在約束處，前後兩點的壓力差，可用來指示流量率。

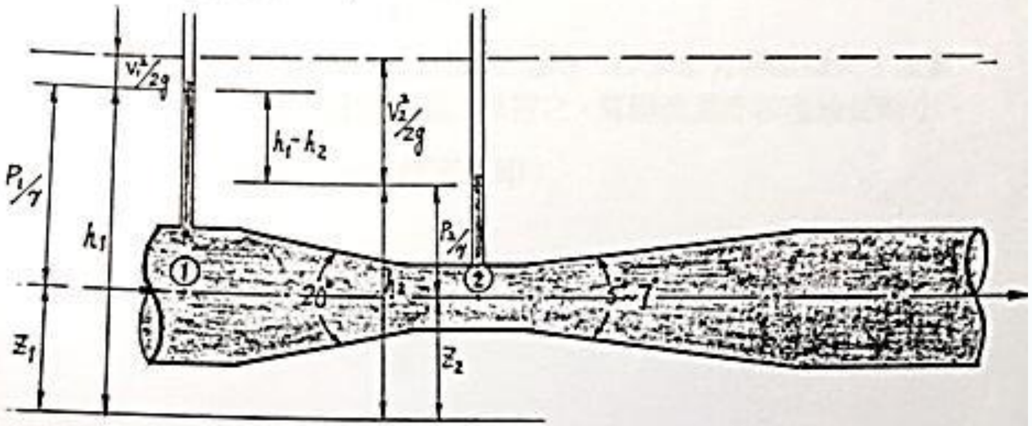


圖 5-6　文氏管

文氏管之裝置如圖 5-6 所示，主要由縮小部、喉部、擴大部等三個部份所構成，若能量損失不計(即 $h_L=0$)，則依 Bernoulli equation 得：

$$\frac{P_1}{\gamma}+z_1+\frac{V_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}+z_2+\frac{V_2^2}{2g}\text{------------(a)}$$

其中　①代表最上游斷面

　　　②代表喉部斷面

假設文氏管為水平，則 $z_1=z_2$

令 $\dfrac{P_1}{\gamma}+z_1=h_1$

$\dfrac{P_2}{\gamma}+z_2=h_2$

則(a)式可寫成　$h_1+\dfrac{V_1^2}{2g}=h_2+\dfrac{V_2^2}{2g}$--------(b)

根據連續方程式 $Q=V_1A_1=V_2A_2$

$$V_1=\left(\frac{A_2}{A_1}\right)V_2$$

由(b)式　$\dfrac{V_2^2}{2g}-\dfrac{V_1^2}{2g}=h_1-h_2$

$$\frac{V_2^2}{2g}\left[1-\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]=h_1-h_2$$

例4-15

　　如圖 3-15 所示之傾斜文氏管 (Venturi tube)，裝置在內徑為 100 mm 的水管上，其收縮部分內徑為 50 mm，水流之方向向下，如在收縮部分截面處的流速為 6.0 m/sec，求差壓計的讀數 h？

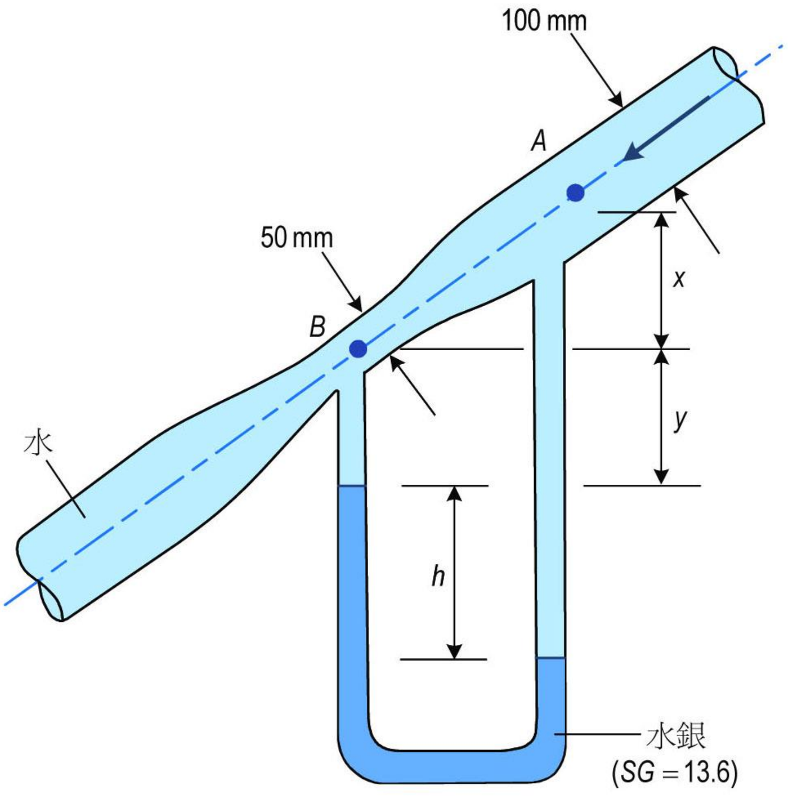


圖 3-15

解 設 A, B 兩點間之高度差為 x，B 點與差壓計較高水銀面之高度差為 y。

首先，由連續方程式知

$$A_A V_A = A_B V_B$$

即
$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{100}{1000}\right)^2 \times V_A = \frac{\pi}{4}\left(\frac{50}{1000}\right)^2 \times 6$$

故
$$V_A = 1.5\ \mathrm{m/sec}$$

由壓力與高度之關係知

$$P_A + \gamma_w (x + y + h) - \gamma_{Hg} h - \gamma_w y = P_B$$

故

$$\begin{aligned} P_A - P_B &= \gamma_{Hg} h - \gamma_w (x + h) \\ &= 13.6 r_w h - \gamma_w (x + h) \\ &= \gamma_w (12.6h - x) \end{aligned} \qquad (1)$$

另由 A, B 兩點間之伯努利方程式知

$$\frac{P_A}{\gamma_w} + z_A + \frac{V_A^2}{2g} = \frac{P_B}{\gamma_w} + z_B + \frac{V_B^2}{2g}$$

即 $$\frac{P_A - P_B}{\gamma_w} + (z_A - z_B) + \frac{V_A^2 - V_B^2}{2g} = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

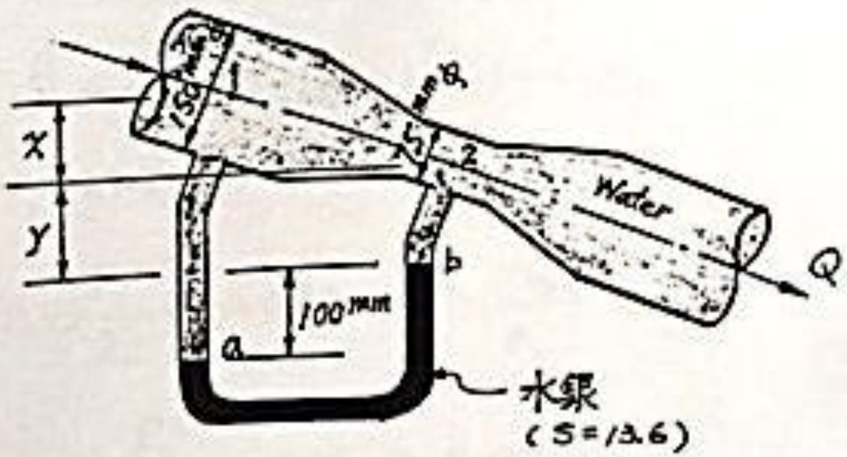
將 (1) 式代入 (2) 式，得

$$\frac{\gamma_w(12.6h - x)}{\gamma_w} + (x - 0) + \frac{(1.5)^2 - (6)^2}{2 \times 9.81} = 0$$

或 $$h = 0.137 \text{ m}$$

例4-16

如圖 5-7 所示文氏管(Venturi tube)，假設 1、2 兩處間之能量損失為 $0.2\overline{V}_1^2/2g$，$\overline{V}_1$ 為 1 處之平均流速，試求其流量 Q 為若干？



解

(1)由連續方程式得

$$Q=\overline{V}_1A_1=\overline{V}_2A_2$$

$$\overline{V}_1=(\frac{A_2}{A_1})\overline{V}_2=(\frac{D_2}{D_1})^2\overline{V}_2=(\frac{75}{150})^2\overline{V}_2=0.25\overline{V}_2\text{-------(a)}$$

(2)取 1、2 兩處間之 Bernoulli equation：

$$\frac{P_1}{\gamma_w}+z_1+\frac{\overline{V}_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma_w}+z_2+\frac{\overline{V}_2^2}{2g}+0.2\frac{\overline{V}_1^2}{2g}$$

以點 2 爲參考高度，即 $z_1=x$ ， $z_2=0$ 代入上式得

$$x+0.8\frac{\overline{V}_1^2}{2g}-\frac{\overline{V}_2^2}{2g}=\frac{P_2-P_1}{\gamma_w}$$

$$x+0.8\frac{(0.25\overline{V}_2)^2}{2g}-\frac{\overline{V}_2^2}{2g}=\frac{P_2-P_1}{\gamma_w}$$

$$x-0.95\frac{\overline{V}_2^2}{2g}=\frac{P_2-P_1}{\gamma_w}\text{-----------(b)}$$

(3)由 1、2 點間之靜壓力關係：

$$P_1+\gamma_w(x+y+0.10)-\gamma_{Hg}(0.10)-\gamma_w\cdot y=P_2$$

$$\therefore P_2-P_1=\gamma_w x+0.10\gamma_w-0.10\cdot\gamma_{Hg}$$

$$\frac{P_2-P_1}{\gamma_w}=x+0.10-0.10\cdot(\frac{\gamma_{Hg}}{\gamma_w})\text{------(c)}$$

∵(b)式=(c)式

$$\therefore x-0.95\frac{\overline{V}_2^{\,2}}{2g}=x+0.10-0.10\cdot(\frac{\gamma_{Hg}}{\gamma_w})$$

$$-(0.95)\frac{\overline{V}_2^{\,2}}{2\times 9.81}=0.10-0.10\cdot(13.6)$$

解得 $\overline{V}_2=5.10\,{}^{m}\!/_{\sec}$

$$Q=\overline{V}_2A_2=5.10\times\frac{\pi}{4}\times(0.075)^2=2.25\times 10^{-2}\,{}^{m^3}\!/_{\sec}$$

4.3.4 具能量損失之柏努利方程式

在實際流體流動過程中，往往會有能量損失 h_L ，同時亦有可能由外界加入能量 H ，因此上節之伯努利方程式可改寫為：

$$\frac{P_1}{\gamma}+z_1+\frac{v_1^2}{2g}+H=\frac{P_2}{\gamma}+z_2+\frac{v_2^2}{2g}+h_L \qquad \textbf{(3-11)}$$

1. 以泵 (pump) 為例

流體流經泵時，由泵抽取 H_P 之能量，如果在流動過程沒有損失，則 (3-11) 式可寫成

$$\frac{P_1}{\gamma}+z_1+\frac{v_1^2}{2g}+H_P=\frac{P_2}{\gamma}+z_2+\frac{v_2^2}{2g}$$

或

$$H_P=\left(\frac{P_2}{\gamma}+z_2+\frac{v_2^2}{2g}\right)-\left(\frac{P_1}{\gamma}+z_1+\frac{v_1^2}{2g}\right) \tag{3-12}$$

2. 以渦輪機 (turbine) 為例

流體流經渦輪機時，輸出能量 H_T，若流動過程無損失，則 (3-11) 式可寫成

$$\frac{P_1}{\gamma}+z_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}+z_2+\frac{v_2^2}{2g}+H_T$$

或

$$H_T=\left(\frac{P_1}{\gamma}+z_1+\frac{v_1^2}{2g}\right)-\left(\frac{P_2}{\gamma}+z_2+\frac{v_2^2}{2g}\right) \qquad \textbf{(3-13)}$$

例4-17

一泵出口壓力計讀數為 3.5 kPa，入口壓力計讀數 $-0.2\,\text{kPa}$，若入出口高度差為 1 m，管徑均相似，且不計一切損失，試求泵之輸入能量（設水之比重量 $\gamma_w = 9810\,\text{N/m}^3$）。

解 入口壓力 $P_1 = -0.2\,\text{kPa}$，出口壓力 $P_2 = 3.5\,\text{kPa}$, $Z_2 - Z_1 = 1\,\text{m}$, $v_1 = v_2$，代入式 (3-12)

$$H_P = \left(\frac{P_2}{\gamma_w} + Z_2 + \frac{V_2^2}{2g}\right) - \left(\frac{P_1}{\gamma_w} + Z_1 + \frac{V_1^2}{2g}\right)$$

$$= \left(\frac{P_2 - P_1}{\gamma_w}\right) + (Z_2 - Z_1) + \left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g}\right)$$

$$= \left(\frac{3.5 \times 1000 - (-0.2) \times 1000}{9810}\right) + 1 + 0$$

$$= 1.3772\,\text{m}$$

4.4 動量方程式

在考慮流體系統與其環境間的交互作用力時，我們由牛頓運動第二定律著手，

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(\vec{P}_{\text{syst}}) \tag{4-1}$$

其中系統的絕對線性動量 $\vec{P}_{\text{syst}}$ 為

$$\vec{P}_{\text{syst}} = \int \vec{V}_{xyz}\, dm = \int \vec{V}_{xyz}\, \rho\, d\forall \tag{4-2}$$

而 $\vec{V}_{xyz}$ 為絕對速度，下標 xyz 表示相對一慣性坐標系統 xyz，式 (4-1) 中 $\vec{F}$ 代表作用於系統之所有外力之向量和，此外力可分為表面力 $\vec{F}_s$ 及物體力 $\vec{F}_B$ 兩種，前者如壓力產生之力、摩擦力等，後者如重力、電磁力等，

將式 (3-3) 應用於式 (4-2) 時，我們取 $B = \vec{P}, \beta = \dfrac{dB}{dm} = \vec{V}_{xyz}$ ，結果為

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{d}{dt}\int_{C\forall} \vec{V}_{xyz}\,\rho\, d\forall + \int_{CS} \vec{V}_{xyz}(\rho \vec{V}_r \cdot d\vec{A})$$

對於固定不動的控制體積 $\vec{V}_r = \vec{V}_{xyz}$ ；對於一等速直線運動的控制體積，因其本身亦為一慣性系統，故對此兩種情況上式可改寫為

$$\vec{F} = \vec{F}_S + \vec{F}_B = \frac{d}{dt}\int_{C\forall} \vec{V}\rho\, d\forall + \int_{CS} \vec{V}(\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) \qquad \textbf{(4-3)}$$

其中 $\vec{V}$ 表示相對於慣性控制體積之速度。

倘為穩定流(steady flow)時，

$\dfrac{d}{dt}\int_{C\forall} \vec{V}\rho\, d\forall$ =0

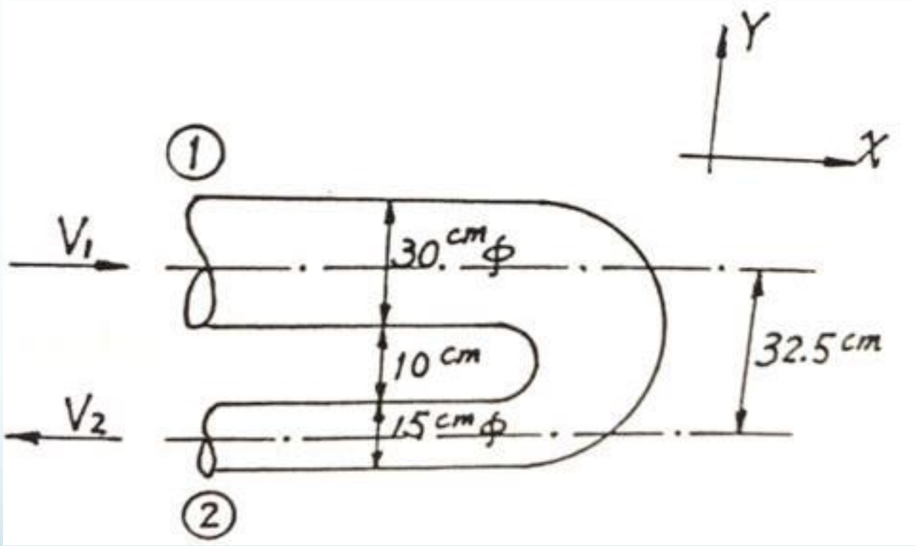
則(4-3)式變為 $\sum \vec{F} = \sum_{c.s.} \vec{V} \cdot \rho \cdot \vec{V} \cdot \vec{A} == \sum_{c.s.} \vec{V} \cdot \rho \cdot Q$

流體流入時，$\vec{V}$與$\vec{A}$方向一致，乘積值為正；

流體流出時，$\vec{V}$與$\vec{A}$方向相反，乘積值為負。

例4-18

一垂直縮小彎管轉角為180°，水流量Q=0.25cms，彎道前之管中壓力為150kPa，彎管體積為$0.1m^3$，假設沒有能量損失，則欲支撐該彎管之作用力為何? 並設彎管金屬重為500N。



解

$$V_1=\frac{Q}{A_1}=\frac{0.25}{(\pi/4)\times(0.30)^2}=3.54\,{}^{m}\!/_{sec}$$

$$V_2=\frac{Q}{A_2}=\frac{0.25}{(\pi/4)\times(0.15)^2}=14.15\,{}^{m}\!/_{sec}$$

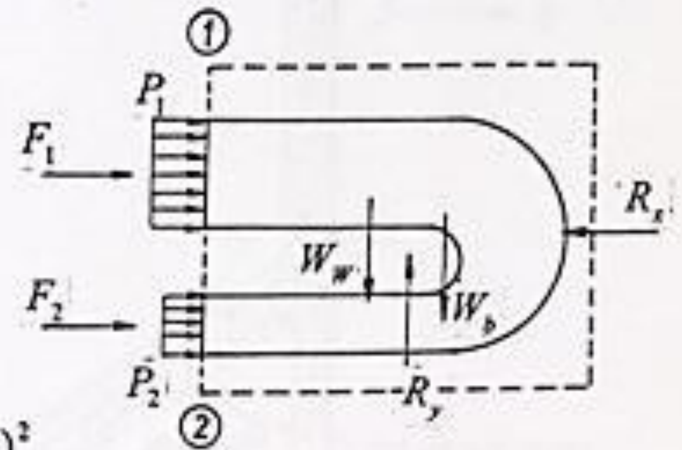


圖 4-15

依 Bernoulli equation：

$$\frac{P_1}{\gamma}+z_1+\frac{V_1^2}{2g}=\frac{P_2}{\gamma}+z_2+\frac{V_2^2}{2g}$$

$$\frac{150}{9.81}+0.325+\frac{(3.54)^2}{2\times 9.81}=\frac{P_2}{9.81}+0+\frac{(14.15)^2}{2\times 9.81}$$

解得　$P_2=59.3\,{}^{kN}\!/_{m^2}=59.3kPa$

由圖 4-15　斷面①處所受之力

$$F_1=\rho QV_1=1000\times 0.25\times 3.54=885N=0.885kN(\longrightarrow)$$

$$P_1A_1=150\times{}^{\pi}\!/_{4}\times(0.30)^2=10.603kN(\longrightarrow)$$

斷面②處所受之力

$$F_2 = \rho Q V_2 = 1000 \times 0.25 \times 14.15 = 3538N = 3.538kN(\rightarrow)$$

$$P_2 A_2 = 59.3 \times \pi/4 \times (0.15)^2 = 1.048kN(\rightarrow)$$

$$\sum F_x = 0 \qquad R_x = F_1 + P_1 A_1 + F_2 + P_2 A_2$$

$$= 0.885 + 10.603 + 3.538 + 1.048 = 16.074kN(\leftarrow)$$

又，在垂直方向上

彎管自重 $W_b = 500N = 0.50kN(\downarrow)$

彎管內之水重 $W_w = \gamma \forall = 9.81 \times 0.10 = 0.981kN(\downarrow)$

$$\sum F_y = 0 \qquad R_y = W_b + W_w$$

$$= 0.50 + 0.981 = 1.481kN(\uparrow)$$

即支撐該彎管之水平力爲 $R_x = 16.074kN(\leftarrow)$

垂直力爲 $R_y = 1.481kN(\uparrow)$

例4-19

設有一噴射流，射出量為60 L/sec的水速度為20m/sec，射向一固定輪葉，求作用於固定輪葉上之力。

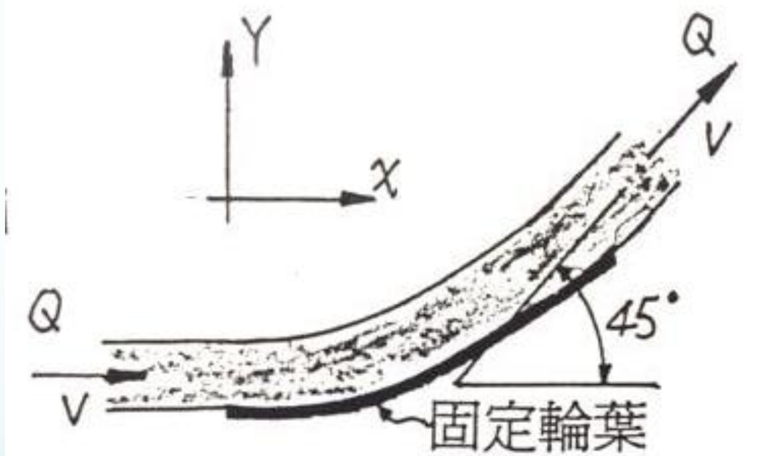


圖 4-18

解

圖

：因流入水流之速度大小與流出水流之速度大小相同，流量亦同，故由圖 4-19，得作用於固定輪葉上之力如下：

(i)於 X 方向

$$F_x = \rho QV - \rho QV\cos 45^\circ$$

$$= 1000 \times 0.060 \times 20 - 1000 \times 0.060 \times 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 352N = 0.352kN(\longrightarrow)$$

(ii)於 Y 方向

$$F_y = \rho QV\sin 45^\circ$$

$$= 1000 \times 0.060 \times 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 849N = 0.849kN(\downarrow)$$

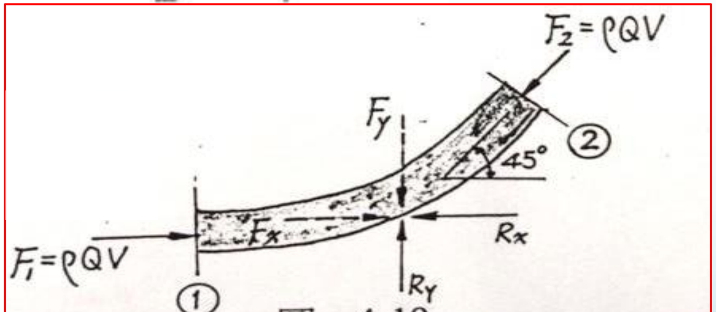
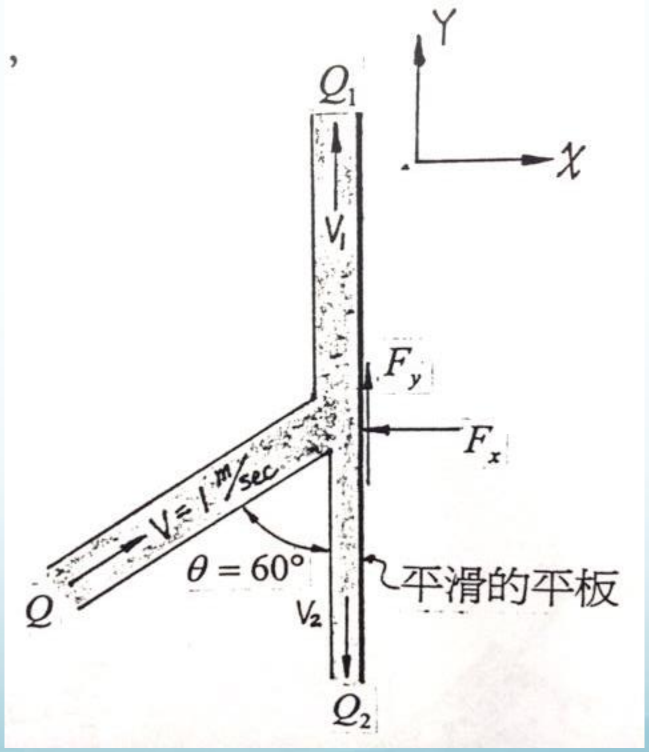


圖 4-19

例4-20

有一噴流打擊一平滑的平板，已知流量Q=0.2cms，θ=60°，流速V= 1m/sec，若忽略摩擦損失，試求分量Q_1、Q_2及平板上之作用力。



解

(1) ∵沒有摩擦損失

∴平板上 Y 方向之作用力 $F_y = 0$

且 $V_1 = V_2 = V = 1 \, {}^{m}/_{sec}$

(2)

$\because \sum F_y = 0$

$\rho Q_1 V_1 - \rho Q_2 V_2 - \rho Q V \cos 60° = 0$

$\rho = const.$　且 $V_1 = V_2 = V$

$\therefore Q_1 - Q_2 - Q \cos 60° = 0$

即 $Q_1 - Q_2 = Q \cos 60° = 0.2 \times 0.5 = 0.1$ -----(a)

又，由連續方程式

$Q_1 + Q_2 = Q = 0.2$ -----------(b)

解(a)、(b)聯立方程式，得

$Q_1 = 0.15CMS$

$Q_2 = 0.05CMS$

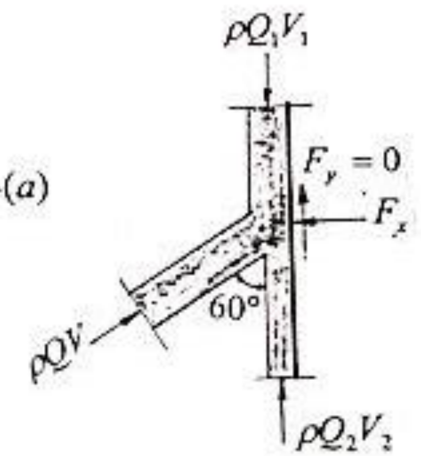


圖　4-17

(3) 同樣由圖 4-17

$\sum F_x = 0$

得知 平板對水流之作用力 $F_x = \rho Q V \sin 60°$

$= 1000 \times 0.2 \times 1 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= 173.2N(\longleftarrow)$

即 分流量　$Q_1 = 0.15CMS$

$Q_2 = 0.05CMS$

平板對水流之作用力 $F_x = 173.2N(\longleftarrow)$

例4-21

一噴流以 V_0 之速度噴出，水平衝擊一平滑導板，如圖 4-2 所示，射流與導板間之夾角為 θ ，若摩擦損失不計，試求 (a) 其分流量 Q_1, Q_2 及 (b) 作用於導板之衝擊力 F 。

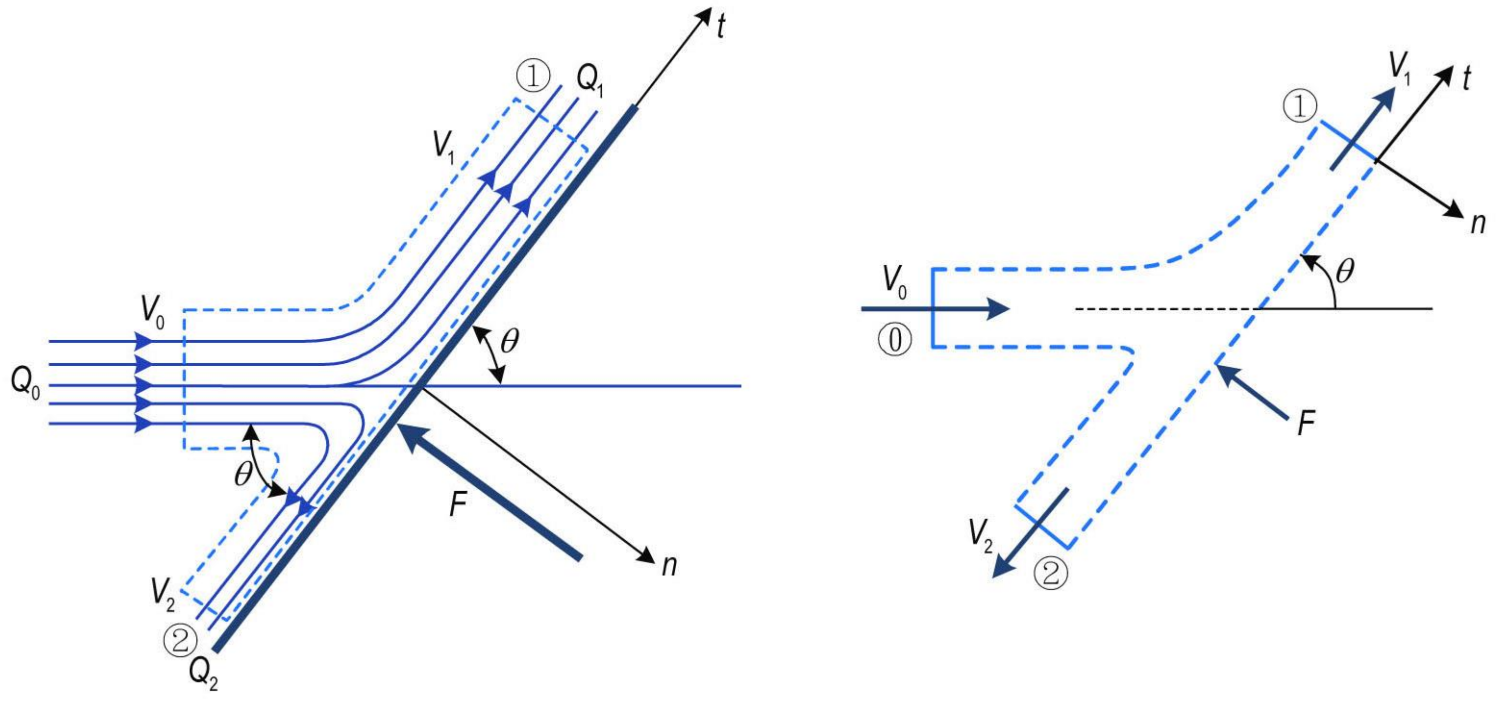


圖 4-2

解 取如圖虛線所示之控制體積。

由質量守恆知

$$A_0V_0 = A_1V_1 + A_2V_2 \qquad \textbf{(1)}$$

其中 A_0 , A_1 及 A_2 分別為截面 0, 1 及 2 之流動截面積。

假設流動在導板上無摩擦損失，則 $V_0 = V_1 = V_2$ ，因此式 (1) 變為

$$Q_0 = A_0V_0 = Q_1 + Q_2 \qquad \textbf{(2)}$$

由於沿著導板方向（t 方向 ）無作用力，因此取 t 方向之動量守恆可得

$$\begin{aligned} O &= \int V_t(\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}) \\ &= (V_0\cos\theta)\cdot[-\rho V_0A_0] + V_1(\rho V_1A_1) - V_2(\rho V_2A_2) \end{aligned}$$

或

$$Q_1 - Q_2 = Q_0\cos\theta \qquad \textbf{(3)}$$

由式 (2) 及式 (3) 解求 Q_1, Q_2 如下：

$$Q_1 = \frac{Q_0}{2}(1+\cos\theta)$$

$$Q_2 = \frac{Q_0}{2}(1-\cos\theta)$$

再由與板面垂直方向（n 方向）之動量守恆得

$$-F = \int V_n(\rho\vec{V}\cdot d\vec{A}) = (-V_0\sin\theta)(\rho V_0 A_0)$$

或 $$F = \rho Q_0 V_0 \sin\theta$$

因此作用於導板之衝擊力大小為 F，方向為正 n 之方向。

例4-22

如圖 4-4 之彎管內的流量為 $0.06\ m^3/s$ 流體比重量為 $9790\ N/m^3$ ，計算截面 1 上螺栓的受力。

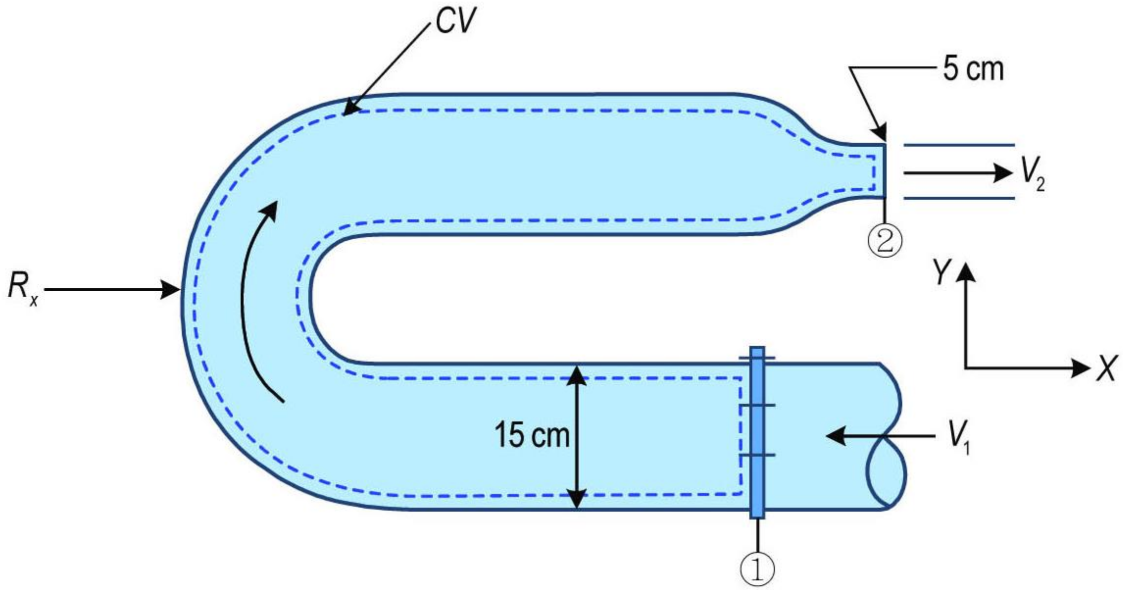


圖 4-4 ([10] 圖 E-5.6)

解 控制體積如圖 4-4 中虛線所示。R_x 為作用於控制體積之反作用力。

由已知之流量

$$Q = \frac{\pi}{4}(D_2)^2 V_2 = 0.06$$

$$V_2 = \frac{0.06}{\frac{\pi}{4}\times(0.05)^2} = 30.56\ \mathrm{m/s}$$

$$V_1 = V_2(D_2/D_1)^2 = 30.56\times\left(\frac{5}{15}\right)^2 = 3.395\ \mathrm{m/s}$$

應用伯努利方程式於截面 ① 及 ② 之間，

$$0 + \frac{(30.56)^2}{2\times 9.81} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{(3.395)^2}{2\times 9.81} \quad (p_2 = \text{大氣壓})$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = 47.59 - 0.59 = 47.0\ \mathrm{m}$$

$$p_1 = 47.0\times 9.79 = 460.2\ \mathrm{kPa}$$

由 x 方向的動量守恆

$$-p_1 A_1 + R_x = \rho Q[V_2 - (-V_1)]$$

得 $$R_x = 10165\ \mathrm{N}$$

因此螺栓受力為 10165 N，方向朝左。